MEESTER LUDOLPHS WORTELREKENEN

MARJANNE DE NIJS

Inleiding

Ludolph van Ceulen (1540 – 1610) was rekenmeester. In één van zijn boeken, *De Arithmetische en Geometrische Fondamenten*,[1] beschrijft hij onder andere het rekenen met wortels, of zoals hij ze noemde *ongheschickte getallen*. In die tijd hadden ze uiteraard nog geen rekenmachine en daarom laat Ludolph zien hoe je van elk getal handmatig de wortel kan berekenen. Daarna gaat hij, net zoals we tegenwoordig leren, bewerkingen uitvoeren met wortelgetallen. Wij zullen ons alleen bezig houden met dit laatste, met behulp van zijn vraagstukken gaan we onze vaardigheden in het rekenen met wortels oefenen.

Anders dan we gewend zijn, benoemt Ludoph specifiek de verschillende soorten wortels. Door je bewust te zijn van deze indeling krijg je een beter begrip van de mogelijkheden en onmogelijkheden bij het rekenen met wortels. Dit is bijvoorbeeld belangrijk bij het exact oplossen van vergelijkingen maar ook bij het oplossen van meetkunde-opgaven. Deze wortels hebben mooie namen: *communicanten* en *binomische en residusche getallen*. Aan het einde weet je precies wat het zijn en hoe je ermee rekent.

De vereiste voorkennis is het wortelrekenen uit klas 2 en we beginnen met het kort herhalen van de belangrijkste regels. Daarna krijg je vraagstukken uit het boek van Ludolph. Deze zien er anders uit dan de rijtjes in je wiskundeboeken. De antwoorden staan al bij de vragen. Opvallend is dat hij de wortels niet herleidt zoals wij gewend zijn. Door bij elke opgave de wortels te herleiden en duidelijk de tussenstappen op te schrijven, moet je aantonen dat het antwoord van Ludolph correct is. We gebruiken af en toe de teksten van Ludolph zelf, die schuingedrukt zijn. Neem even de tijd om te wennen aan het Nederlands uit de 16^{e} eeuw. Veel plezier!

[1] Ceulen, L. van, 1615. *De Arithmetische en Geometrische Fondamenten*. Joost van Colster en Jacob Marcus, Leiden.

Voorkennis

Bij het rekenen met wortels heb je de volgende regels geleerd:

Optellen van wortels:
Optellen van wortels kan alleen als ze gelijksoortig zijn.

Voorbeelden:

$3\sqrt{2}+7\sqrt{2} = 10\sqrt{2}$
$2\sqrt{3}+3\sqrt{3} = 5\sqrt{3}$
$3\sqrt{5}-\sqrt{5} = 2\sqrt{5}$
$2\sqrt{3}+3\sqrt{2}$ kan niet samengevoegd.

Vermenigvuldigen van wortels:
Bij het vermenigvuldigen van wortels geldt de algemene regel: $\sqrt{a}\cdot\sqrt{b}=\sqrt{ab}$.

Voorbeelden:

$\sqrt{3}\cdot\sqrt{5} = \sqrt{15}$
$2\sqrt{3}\cdot 3\sqrt{5} = 6\sqrt{15}$
$2\sqrt{2}\cdot 3\sqrt{2} = 6\sqrt{4} = 6\cdot 2 = 12$

Herleiden van wortels:
Als je het getal onder de wortel kan delen door een kwadraat kan je de wortel herleiden.

Voorbeelden:

$\sqrt{28} = \sqrt{4}\cdot\sqrt{7} = 2\sqrt{7}$
$\sqrt{75} = \sqrt{25}\cdot\sqrt{3} = 5\sqrt{3}$
$\sqrt{288} = \sqrt{144}\cdot\sqrt{2} = 12\sqrt{2}$
$\sqrt{96} = \sqrt{16}\cdot\sqrt{6} = 4\sqrt{6}$

Delen van wortels:
Bij het delen van wortels geldt de algemene regel: $\dfrac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}=\sqrt{\dfrac{a}{b}}$.

Voorbeelden:

$\frac{\sqrt{10}}{\sqrt{2}} = \sqrt{\frac{10}{2}} = \sqrt{5}$
$\frac{12\sqrt{10}}{3\sqrt{5}} = \frac{12}{3}\cdot\sqrt{\frac{10}{5}} = 4\sqrt{2}$
$\sqrt{\frac{25}{16}} = \frac{\sqrt{25}}{\sqrt{16}} = 1\frac{1}{4}$

Extra: Wortel herschrijven:
Als onder het wortelteken een breuk staat, of een wortel in de noemer van de breuk kunnen we deze herschrijven.

Voorbeelden:

$\sqrt{3\frac{2}{9}} = \sqrt{\frac{29}{9}} = \frac{\sqrt{29}}{\sqrt{9}} = \frac{1}{3}\sqrt{29}$

$\sqrt{4\frac{1}{6}} = \sqrt{\frac{25}{6}} = \frac{\sqrt{25}}{\sqrt{6}} = \frac{5}{\sqrt{6}} = \frac{5\sqrt{6}}{\sqrt{6}\cdot\sqrt{6}} = \frac{5}{6}\sqrt{6}$

Additie in ongheschickte getallen

We starten met de *additie* oftewel optelling van wortels.

Hieronder geeft Ludolph ons *eenighe exempelen*:

Vraagstuk a:

$$\text{Addeert}\left\{\begin{array}{lll}\sqrt{27} & \text{tot} & \sqrt{48}\\ \sqrt{7} & \text{tot} & \sqrt{28}\\ \sqrt{75} & \text{tot} & \sqrt{27}\\ \sqrt{10} & \text{tot} & \sqrt{1000}\\ \sqrt{176} & \text{tot} & \sqrt{396}\\ \sqrt{50} & \text{tot} & \sqrt{162}\end{array}\right\}\text{Komt de somme}\left\{\begin{array}{l}\sqrt{147}\\ \sqrt{63}\\ \sqrt{192}\\ \sqrt{1210}\\ \sqrt{1100}\\ \sqrt{392}\end{array}\right.$$

We zien dat Ludolph in zijn antwoord niet de wortels herleidt. Wij zouden de eerste opgave als volgt uitwerken:
$\sqrt{27}+\sqrt{48}=3\sqrt{3}+4\sqrt{3}=7\sqrt{3}$, het antwoord van Ludolph kunnen we controleren want $7\sqrt{3}=\sqrt{49\cdot 3}=\sqrt{147}$.

Opgave 1.
Werk de rest van de opgaven van vraagstuk a op deze manier uit, herleid eerst de wortels voordat je ze optelt. Laat zien dat je vereenvoudigde antwoord overeenkomt met de oplossing van Ludolph.

We hebben bij de voorkennis gezien dat we niet-gelijksoortige wortels niet kunnen samenvoegen. In de opgaven die Ludolph hier geeft telt hij dus ook alleen maar gelijksoortige wortels op, hij noemt deze *communicanten*.

Communicanten zijn wortels waarbij de getallen onder de wortel een gemeenschappelijke (priem)factor hebben en een product zijn van deze factor met een kwadraat. Bijvoorbeeld $\sqrt{12}$ en $\sqrt{27}$, de getallen onder de wortel zijn allebei deelbaar door 3 en een product van 3 met een kwadraat: $12=3\cdot 4$ en $27=3\cdot 9$. Als je ze optelt krijg je: $\sqrt{12}+\sqrt{27}=2\sqrt{3}+3\sqrt{3}=5\sqrt{3}$.

De wortels $\sqrt{21}$ en $\sqrt{28}$ zijn geen *communicanten*, 21 en 28 hebben weliswaar een gemeenschappelijke factor 7 maar $21=7\cdot 3$, en 3 is geen kwadraat. Als je ze optelt krijg je een getal dat bestaat uit twee delen: $\sqrt{21}+\sqrt{28}=\sqrt{21}+2\sqrt{7}$. Zo'n getal noemt Ludolph *twenaemich*, oftewel tweenamig. We zullen daar verderop meer van zien.

Extra:

Hieronder zie je een uitgewerkt voorbeeld uit *De Arithmetische en Geometrische Fondamenten* waar Ludolph op twee manieren laat zien hoe je $\sqrt{32}$ en $\sqrt{98}$ optelt.

Korter Reghel, om alle Communicanten te addeeren

Men sal de ghetallen, door divideren, of multipliceeren, brengen in haer Rationale proportie, dan treckt uyt elcx den wortel, dese wortels addeert tsamen, de somme quadreert, het comende multipliceert ofte divideert, daer mede de getallen Rationael ghemaeckt zijn, Comt de begeerde somme der getallen

Volghen Exempels

Addeert √32 tot √98
√2
√16 √49
4 7
7
11
11
11
11
√121
√2
√242 somme

Anders, daer de selve door multiliceren rationael gemaect werden.
√32 tot √98
√2
√64 √196
8 14
8
22
22
44
44
√484
√2 somme als
√242 boven.

Opgave 2.

a. Leg in je eigen woorden uit hoe Ludolph bij de optelling van $\sqrt{32}+\sqrt{98}$ precies te werk gaat, eerst in het linker voorbeeld en daarna het rechter voorbeeld.

b. Waarom speelt juist $\sqrt{2}$ hier zo'n belangrijke rol?

Ludolph heeft ook een algemene rekenregel voor het optellen van gelijksoortige wortels, daarom was het voor hem ook niet nodig om te herleiden. Voor het optellen van twee gelijksoortige wortels, oftewel *communicanten* gebruikte hij de volgende rekenregel: $\sqrt{a}+\sqrt{b}=\sqrt{a+\sqrt{4ab}+b}$. Omdat het *communicanten* zijn is het getal $4ab$ altijd een kwadraat.

Opgave 3.

a. Laat met behulp van deze regel zien dat $\sqrt{32}+\sqrt{98}=\sqrt{242}$.

b. Door $\sqrt{a}+\sqrt{b}$ te kwadrateren kan je aantonen dat de rekenregel correct is, laat dit zien.

c. Leg uit waarom $4ab$ altijd een kwadraat is bij *communicanten*?

Substractie van Irrationale getallen

Behalve *communicanten* optellen kunnen we ze ook van elkaar afhalen, oftewel *substraheren*. Om dit te oefenen geeft Ludolph de *volgende exempels van communicanten*:

Vraagstuk b:

$$\text{Substraheert}\left\{\begin{array}{l}\sqrt{2}\\ \sqrt{5}\\ \sqrt{3}\\ \sqrt{12}\\ \sqrt{2\frac{2}{5}}\\ \sqrt{33\frac{1}{3}}\\ \sqrt{57\frac{3}{5}}\\ \sqrt{28\frac{4}{7}}\\ \sqrt{115\frac{1}{5}}\\ \sqrt{28\frac{1}{8}}\end{array}\right\}\text{van}\left\{\begin{array}{l}\sqrt{18}\\ \sqrt{45}\\ \sqrt{108}\\ \sqrt{147}\\ \sqrt{29\frac{2}{5}}\\ \sqrt{85\frac{1}{3}}\\ \sqrt{102\frac{2}{5}}\\ \sqrt{457\frac{1}{7}}\\ \sqrt{204\frac{4}{5}}\\ \sqrt{36\frac{1}{8}}\end{array}\right\}\text{rest}\left\{\begin{array}{l}\sqrt{8}\\ \sqrt{20}\\ \sqrt{75}\\ \sqrt{75}\\ \sqrt{15}\\ \sqrt{12}\\ \sqrt{6\frac{2}{5}}\\ \sqrt{257\frac{1}{7}}\\ \sqrt{12\frac{4}{5}}\\ \sqrt{\frac{1}{2}}\end{array}\right.$$

Er staat letterlijk bij de eerste opgave: haal $\sqrt{2}$ af van $\sqrt{18}$ dan blijft $\sqrt{8}$ over. In moderne notatie: $\sqrt{18}-\sqrt{2}=\sqrt{8}$. Dit oplossen is vergelijkbaar met de uitwerkingen van opgave 1: $\sqrt{18}-\sqrt{2}=3\sqrt{2}-\sqrt{2}=2\sqrt{2}=\sqrt{8}$.

De opgaven met breuken in de wortel zijn lastiger maar aangezien de breuken gelijknamig zijn kunnen we daar gebruik van maken. We laten dit zien door de laatste opgave uit te werken, $\sqrt{36\frac{1}{8}}-\sqrt{28\frac{1}{8}}=\sqrt{\frac{1}{2}}$:

$(\sqrt{36\frac{1}{8}}-\sqrt{28\frac{1}{8}})\cdot\sqrt{8}=\sqrt{289}-\sqrt{225}$	*we vermenigvuldigen beide wortels met* $\sqrt{8}$
$\sqrt{289}-\sqrt{225}=17-15=2$	*deze opgave is eenvoudig op te lossen*
$\dfrac{2}{\sqrt{8}}=\dfrac{\sqrt{4}}{\sqrt{8}}=\sqrt{\frac{1}{2}}$	*en nu weer delen door* $\sqrt{8}$

Extra: We kunnen de wortel nu nog herschrijven: $\sqrt{\frac{1}{2}}=\frac{\sqrt{1}}{\sqrt{2}}=\frac{1}{\sqrt{2}}\cdot\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{2}}{2}=\frac{1}{2}\sqrt{2}$.

Opgave 4.
Schrijf alle opgaven van vraagstuk b in de moderne notatie op, herleid daarna de wortels voordat je verder rekent. Toon aan dat de oplossingen van Ludolph correct zijn.

Extra: Schrijf zelf de oplossingen zonder de breuk onder het wortelteken.

Multiplicatie in Irrationale getallen

Met *multiplicatie* wordt bedoeld vermenigvuldigen, om dit te oefenen geeft Ludolph eerst een voorbeeld met communicanten:

Vraagstuk c:

$$\text{Multipliceert}\left\{\begin{array}{l}\sqrt{72}\\ \sqrt{300}\\ \sqrt{60\frac{1}{2}}\\ \sqrt{31\frac{1}{4}}\end{array}\right\}\text{met}\left\{\begin{array}{l}\sqrt{32}\\ \sqrt{192}\\ \sqrt{50}\\ \sqrt{24\frac{1}{5}}\end{array}\right\}\text{Comt}\left\{\begin{array}{l}48\\ 240\\ 55\\ 27\frac{1}{2}\end{array}\right.$$

Opgave 5.
Schrijf deze opgaven van vraagstuk c in moderne notatie, herleid de wortels en voer dan pas de vermenigvuldiging uit. Laat zien dat het antwoord van Ludolph correct is.

Opgave 6.
Kan je uitleggen waarom bij vraagstuk c het antwoord altijd een niet-wortel getal is?

Na deze voorbeelden zegt Ludolph: *Volgen exempelen, welcke geen Rationale proportie hebben*.

Vraagstuk d:

$$\text{Multipliceert}\left\{\begin{array}{l}\sqrt{12}\\ \sqrt{17}\\ 8\\ \sqrt{\frac{2}{3}}\end{array}\right\}\text{met}\left\{\begin{array}{l}\sqrt{38}\\ \sqrt{23\frac{1}{2}}\\ \sqrt{42}\\ 2\frac{1}{2}\end{array}\right\}\text{Comt}\left\{\begin{array}{l}\sqrt{456}\\ \sqrt{399\frac{1}{2}}\\ \sqrt{2688}\\ \sqrt{4\frac{1}{6}}\end{array}\right.$$

Opgave 7.
Schrijf de vermenigvuldigingen van vraagstuk d eerst in moderne notatie en werk ze uit. Herleid je eigen antwoord zover mogelijk en laat zien dat de antwoorden van Ludolph correct zijn.

Extra: Schrijf zelf de oplossingen zonder de breuk onder het wortelteken.

Divisie van Irrationale getallen

Als Ludolph het over divisie heeft dan bedoelt hij delen, in de voorkennis zagen jullie al de regels die daar voor gelden. Weer laat Ludolph ons eerst oefenen met communicanten:

Vraagstuk e:

$$\text{Divideert}\left\{\begin{array}{l}\sqrt{288}\\ \sqrt{2592}\\ \sqrt{1875}\\ \sqrt{18}\\ \sqrt{12}\end{array}\right\}\text{door}\left\{\begin{array}{l}\sqrt{18}\\ \sqrt{72}\\ \sqrt{12}\\ \sqrt{4\frac{1}{2}}\\ \sqrt{27}\end{array}\right\}\text{Comt}\left\{\begin{array}{l}4\\ 6\\ 12\frac{1}{2}\\ 2\\ \frac{2}{3}\end{array}\right.$$

Opgave 8.
Schrijf de opgaven van vraagstuk e in moderne notatie, herleid de wortels voordat je de deling uitvoert. Laat met duidelijke tussenstappen zien dat de antwoorden van Ludolph correct zijn.

Nu schrijft Ludolph: *Volgen Exempelen welck geen communicanten zijn*:

Vraagstuk f:

$$\text{Divideert}\left\{\begin{array}{l}\sqrt{832}\\ \sqrt{796}\\ \sqrt{27}\\ \sqrt{1\frac{2}{3}}\\ \sqrt{\frac{2}{9}}\end{array}\right\}\text{door}\left\{\begin{array}{l}\sqrt{32}\\ \sqrt{24}\\ \sqrt{2\frac{2}{3}}\\ \sqrt{1\frac{1}{2}}\\ \sqrt{\frac{5}{6}}\end{array}\right\}\text{Comt}\left\{\begin{array}{l}\sqrt{26}\\ \sqrt{33\frac{1}{6}}\\ \sqrt{10\frac{1}{8}}\\ \sqrt{1\frac{1}{9}}\\ \sqrt{\frac{4}{15}}\end{array}\right.$$

Opgave 9.
Werk de opgaven van vraagstuk f netjes uit met tussenstappen en laat zien dat de oplossingen van Ludolph correct zijn.

Extra: Schrijf zelf de oplossingen zonder de breuk onder het wortelteken.

Additie van Binomische en Residusche getallen

Ludolph legt als volgt uit wat *binomische* en *residusche* getallen zijn:

Binomium, is een twenaemich[2] *getal, welcke tsamen gevoucht syn met het teecken* $+$*, als* $9+\sqrt{7}$*. Item* $\sqrt{13}+\sqrt{5}$*, ofte* $\sqrt{15}+2$*, &c. Risiduum*[3]*, is mede een getal van twee naeme, gebonden met het teecken* $-$*, als* $\sqrt{7}-\sqrt{73}$*, item* $12-\sqrt{6}$*,* $\sqrt{19}-3$ *&c.*

Opgave 10.

a. Schrijf de tekst over in je eigen woorden.

b. Geef een ander voorbeeld dan Ludolph van een *binomisch* en een *residusch* getal.

c. Waarom is $\sqrt{8}+\sqrt{2}$ geen *binomisch* getal?

We gaan eerst *binomische* en *residusche* getallen optellen:

Vraagstuk g:

$$\text{Addeert}\left\{\begin{array}{l} 8+\sqrt{50} \\ 7-\sqrt{12} \\ 10+\sqrt{32} \\ 12-\sqrt{98} \\ \sqrt{243}+8 \\ \sqrt{50}-\sqrt{28} \end{array}\right\}\text{tot}\left\{\begin{array}{l} 11+\sqrt{18} \\ 9-\sqrt{27} \\ 6-\sqrt{2} \\ 8+\sqrt{4\frac{1}{2}} \\ 20-\sqrt{12} \\ \sqrt{63}-\sqrt{8} \end{array}\right\}\text{somme}\left\{\begin{array}{l} 19+\sqrt{128} \\ 16-\sqrt{75} \\ 16+\sqrt{18} \\ 20-\sqrt{60\frac{1}{2}} \\ 28+\sqrt{147} \\ \sqrt{18}+\sqrt{7} \end{array}\right.$$

Opgave 11.
Werk de opgaven van vraagstuk g uit en herleid zo mogelijk de wortels voordat je er verder mee gaat rekenen, toon aan dat de oplossingen van Ludolph correct zijn.

Volgende noch ander Exempelen:

Vraagstuk h:

$$\text{Addeert}\left\{\begin{array}{l} 21+\sqrt{5} \\ 5-\sqrt{10} \\ \sqrt{32}-\sqrt{12} \\ \sqrt{18}+\sqrt{12} \end{array}\right\}\text{tot}\left\{\begin{array}{l} 17-\sqrt{8} \\ 8-\sqrt{7} \\ \sqrt{300}-\sqrt{32} \\ \sqrt{12}-\sqrt{8} \end{array}\right\}\text{somme}\left\{\begin{array}{l} 38-\sqrt{8}+\sqrt{5} \\ 13-\sqrt{10}-\sqrt{7} \\ \sqrt{192} \\ \sqrt{48}+\sqrt{2} \end{array}\right.$$

Opgave 12.
Werk de opgaven van vraagstuk h uit en herleid zo mogelijk de wortels voordat je er verder mee gaat rekenen, laat zien dat de oplossingen van Ludolph correct zijn.

[2] Zie ook pagina 3.

[3] Residuum.

Substractie van Binomische en Residusche getallen

Daar waar je *binomische* en *residusche* getallen kan optellen kan je ze ook van elkaar afhalen, oftewel *substractie*:

Vraagstuk i:

$$\text{Substraheert}\left\{\begin{array}{l}13-\sqrt{72}\\17-\sqrt{27}\\16+\sqrt{8}\\29+\sqrt{3}\end{array}\right\}\text{van}\left\{\begin{array}{l}37+\sqrt{128}\\29-\sqrt{12}\\25-\sqrt{2}\\38-\sqrt{19}\end{array}\right\}\text{somme}\left\{\begin{array}{l}24+\sqrt{392}\\12+\sqrt{3}\\9-\sqrt{18}\\9-\sqrt{19}-\sqrt{3}\end{array}\right.$$

Let er bij deze opgaven op dat je haakjes om de *binomische* en *residusche* getallen zet. De moderne notatie van de eerste opgave zoals Ludolph hem schrijft is: $37+\sqrt{128}-(13-\sqrt{72}) = 24+\sqrt{392}$.

Opgave 13.
Werk de opgaven van vraagstuk i uit en herleid zo mogelijk de wortels voordat je er verder mee gaat rekenen, toon daarna aan dat de oplossingen van Ludolph correct zijn.

Extra uitdaging:
Volgens Ludolph van Ceulen is, in een cirkel met straal 1, de zijde van een regelmatige 12-hoek $\sqrt{2-\sqrt{3}}$.[4]

Opgave 14.
Van Ceulen zegt dat deze $\sqrt{2-\sqrt{3}}$ gelijk is aan $\sqrt{1\frac{1}{2}}-\sqrt{\frac{1}{2}}$. Klopt dat?

[4] Zie voor meer informatie: Het jaar van Ludolph van Ceulen.