Landmeten onder leiding van Ludolph van Ceulen 1540 – 1610

Margot Rijnierse

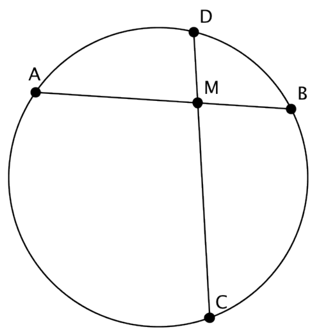
Inleiding

De opdrachten die je gaat maken zijn opdrachten uit *Vanden Circkel* van Ludolph van Ceulen (Delft, 1596). Ludolph van Ceulen was schermleraar en een geweldige rekenmeester en wiskundige. De laatste jaren van zijn leven was hij verbonden aan de ingenieursopleiding, ondergebracht bij de universiteit van Leiden. Deze ingenieursopleiding was uniek in Europa, omdat er tot dan toe geen vakopleidingen op hoog niveau bestonden en omdat er in de landstaal werd onderwezen en niet in het Latijn. De opleiding heette dan ook *De Duytsche Mathematique*.
In de zestiende eeuw was er geen opleiding voor landmeters. Toch was landmeten een belangrijke zaak. Als je land wil verkopen, verdelen of ruilen is het belangrijk om precies te weten hoeveel je hebt. Bovendien was het van groot belang om nauwkeurig vast te stellen hoeveel iedereen bezat in verband met de belastingheffing! De gewone mensen konden meestal slecht rekenen. De landmeters moesten goed kunnen rekenen en zeer betrouwbaar zijn.
Het is niet bekend of Ludolph van Ceulen de opgaven in *Vanden Circkel* in zijn lessen gebruikt heeft. Het is wel duidelijk dat hij de lezers wilde klaarstomen om zoveel mogelijk verschillende soorten problemen op te kunnen lossen. In het boek staan deze opgaven achter uitgebreide sinus/cosinus/tangens tabellen, *De Tafelen*. Je ziet die term in de titel van de hoofdstukken terug. Hoofdstuk 18 heet bijvoorbeeld: *Daer inne dat ghebruyck der voorgestelde Tafelen gheleert werdt* (*voorgestelde Tafelen* - hiervoor vermelde tabellen). In veel van de opdrachten heb je dan ook 'soscastoa' nodig.
Ludolph van Ceulen kon heel handig rekenen. Hij gebruikte vaak de vergrotingsfactor om problemen op te lossen waar wij algebra en een rekenmachine zouden gebruiken. Je zal zien hoe hij die vergrotingsfactor handig inzet!
In sommige opdrachten wordt de roede gebruikt. De roede kan zowel een lengtemaat als een oppervlaktemaat zijn; de betekenis moet uit de context blijken. In elk gebied zijn andere afspraken over de roede van kracht. De Bossche roede staat voor 5,75 m of 35,1 m^2 en de Rijnlandse roede voor 3,767 m of 14,19 m^2. Bij van Ceulen hebben we te maken met de Rijnlandse roede. Op het stadhuis van Leiden zijn twee knoppen aangebracht die de lengte van de roede aangeven!

Opdracht

Je vindt in deze enveloppe twee opdrachten voor de groep. Bij elke opdracht staat een beschrijving van de manier waarop je de oplossing kan vinden. Je gebruikt vooral ‘soscastoa’ en de stelling van Pythagoras. Eén keer heb je Van Ceulens propositie 50 nodig. Die vind je hieronder.

Propositie 50
Als twee lijnen elkaar snijden in een cirkel, dan zijn de ’rechthoekige vierkanten‘ (rechthoeken) van de delen aan elkaar gelijk.
Hier: $AM \cdot BM = CM \cdot DM$

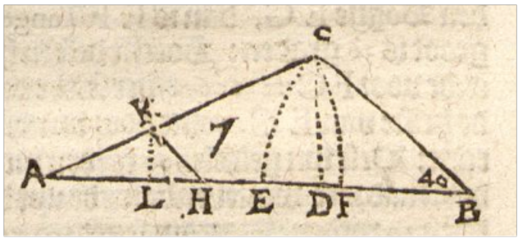


De opdrachten zijn doordenkers, maar je wordt stapsgewijs naar de oplossing gebracht. Zorg dat je tussendoor niet afrondt. Je tussen-antwoorden mag je in 2 decimalen achter de komma opschrijven, maar reken door met het onafgeronde antwoord. Schrijf de berekeningen duidelijk op en lever de uitwerkingen netjes in. Zorg dat alle groepsleden een bijdrage leveren en geef aan wie wat gedaan heeft.
Werk beide opdrachten uitgebreid uit.
Succes!

LUDOLPH VAN CEULEN
EXEMPEL 7
Hoofdstuk 18

Hieronder volgt een opgave uit hoofdstuk 18 van *Vanden Cirkel* (1596) van Van Ceulen. Hoofdstuk 18 heeft als titel: *Daer inne dat ghebruyck der voorgestelde Tafelen gheleert werdt.* Je gaat de opgave op twee manieren oplossen. De tweede manier komt uit het boek van Van Ceulen.

Exempel 7 (tekst van Van Ceulen)



In desen Trianghel is de syde CB bekent/ ende doet 50 roeden/ ende den winckel ACB doet 115 graden ende den winckel ABC doet 40 graden. Van desen wilmen een viercant snijden met eene rechte Linie/ tegen CB parallel, welck viercant groot sal wesen 1500 roeden.
Soeck hoe groot AH is.
Let op: *viercant* = vierhoek en *quadraet* = vierkant

Voorbeeld 7 (vertaling)

In driehoek ABC is $BC = 50$, $\angle ACB = 115°$ en $ABC = 40°$. Hiervan wil men een vierhoek snijden met een rechte lijn (HK), evenwijdig aan BC, zodat de vierhoek ($HKCB$) een oppervlakte heeft van 1500 roeden^2.
Gevraagd: Hoe groot is AH?

Oplossing met algebra

- Teken als hulplijn $CD \perp AB$.
  Bereken $\angle BCD$.
- Bereken $\angle ACD$.
- Bereken CD en BD en AD. (soscastoa)
- Bereken de oppervlakte $\triangle ABC$.
- De oppervlakte van $HKCB$ moet 1500 roeden^2 worden.
  Wat blijft er over voor de oppervlakte van $\triangle AHK$? (1)

- Toon aan dat $\triangle ABC$ gelijkvormig is met $\triangle AHK$.
- Je weet de oppervlakte van $\triangle AHK$, maar je weet geen enkele zijde. Je weet AB en CD en daarom kan je het volgende doen:
  Stel $AH = x$ (2)
  Vul de verhoudingstabel in .

	basis	hoogte
$\triangle AHK$	x	LK
$\triangle ABC$	$AB = ...$	$CD = ...$

- $LK = ...$ (Dit wordt een berekening/formule met x erin.) (3)
- Vul (1) en (2) en (3) in in de formule voor de oppervlakte.
  Oppervlakte $\triangle AHK = \frac{1}{2} \cdot AH \cdot LK$ = ... = ...
- Los deze vergelijking op.
- $AH = ...$

Oplossing van Van Ceulen met vergrotingsfactor

Van Ceulen doet voor een groot deel precies wat je hierboven ook hebt gedaan.
Ook hij heeft van beide driehoeken de oppervlakte berekend en aangetoond dat $\triangle ABC$ gelijkvormig is met $\triangle AHK$. Van Ceulen schrijft:
De oppervlaktes van de driehoeken hebben dezelfde verhouding als het kwadraat van de overeenkomende zijden.

- Vul de verhoudingstabel in:

	Opp	zijde^2
$\triangle ABC$	...	...
$\triangle AHK$	...	$AH^2 = ...$

- Bereken met verhoudingen AH^2.
- Bereken AH.

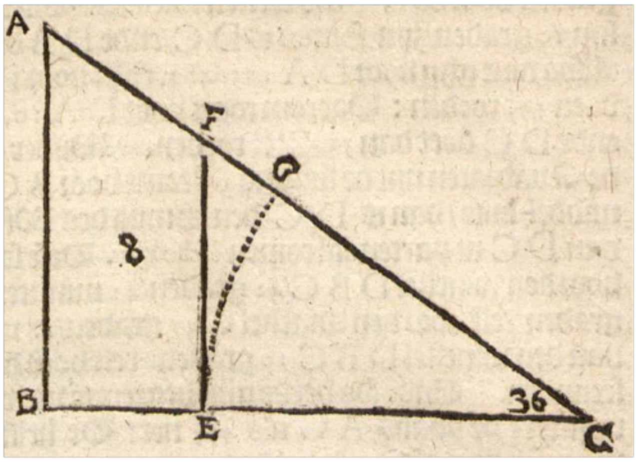
Je kan ook eerst de vergrotingsfactor k berekenen (maar let op: je vergelijkt oppervlaktes met elkaar) en dan AH berekenen met de vergrotingsfactor.

LUDOLPH VAN CEULEN
EXEMPEL 8 - Hoofdstuk 18

Hieronder volgt een opgave uit hoofdstuk 18 van *Vanden Cirkel* (1596) van Van Ceulen. Hoofdstuk 18 heeft als titel: *Daer inne dat ghebruyck der voorgestelde Tafelen gheleert werdt.* Je gaat de opgave op twee manieren oplossen. De tweede manier komt uit het boek van Van Ceulen.

Exempel 8 (tekst van Van Ceulen)

Daer is een stuck Lands/gelijckformich desen hier tegen-staende Triangel ABC, daervan wilmen een stuc snijden/ met een recht-staende Linie/op BC, raeckende AC, alsoo dat het afghesneden stuck groot sy 900 roeden int viercant.
Vraghe: Als den Winckel C doet 36 graden/ hoe lanck elcke syde des afghesneden Trianghels sal zijn.



Voorbeeld 8 (vertaling)

Er is een driehoekig stuk land $\triangle ABC$. Daar wil men een stuk afsnijden met een lijn (EF) die loodrecht staat op BC. De oppervlakte van het afgesneden stuk land moet 900 roeden^2 groot zijn.
Gevraagd: Als $\angle C = 36°$, hoe lang zijn dan de zijden van de afgesneden driehoek (CE, CF, en EF)? (Uit de vraag blijkt pas dat Van Ceulen met het afgesneden stuk het driehoekige stuk CEF bedoelt.)

Oplossing met algebra

Je weet de oppervlakte van $\triangle CEF$, maar je weet geen enkele zijde. Je weet wel een hoek en daarom kan je het volgende doen. Stel $CF = x$ en maak daarmee een vergelijking die je op kan lossen.

- Stel: $CF = x$.

$\sin \angle C = \frac{...}{...}$ Vul in wat je weet: $\sin 36 = \frac{...}{x}$ dus $EF = ...$ (1)

$\cos \angle C = \frac{...}{...}$ Vul in wat je weet: $\cos 36 = \frac{...}{x}$ dus $CE = ...$ (2)

- Vul (1) en (2) in in de formule voor de oppervlakte:
  Oppervlakte $\triangle CEF = \frac{1}{2} \cdot CE \cdot EF = ... = 900$ roeden^2.

- Los de vergelijking op. Dus $CF = ...$

- Bereken EF en CE met behulp van (1) en (2).

Oplossing van Van Ceulen met vergrotingsfactor

Van Ceulen werkt in deze opgaven met driehoeken waarvan de schuine zijde 10 000 000 is, omdat hij in zijn *Tafelen* voor deze situatie bij een bepaalde hoek de lengte van de overstaande zijde kan opzoeken. Met verhoudingen berekent hij vervolgens de gevraagde zijde uit de opgave. Van Ceulen werkte graag met grote getallen, omdat hij dan het werken met kommagetallen kon vermijden. Nu is het voor ons onhandig rekenen met een schuine zijde van 10 000 000, dus nemen we hier een schuine zijde van 10, maar een ander getal mag ook! Het lijkt vreemd, maar je zal zien dat het tot een oplossing leidt!

- Neem $CF = 10$. Bereken de oppervlakte van $\triangle CEF$ als je doorrekent met $CF = 10$.

- De werkelijke oppervlakte van $\triangle CEF$ is 900 roeden^2. Bereken de vergrotingsfactor k. (Let op: je vergelijkt oppervlaktes met elkaar!)

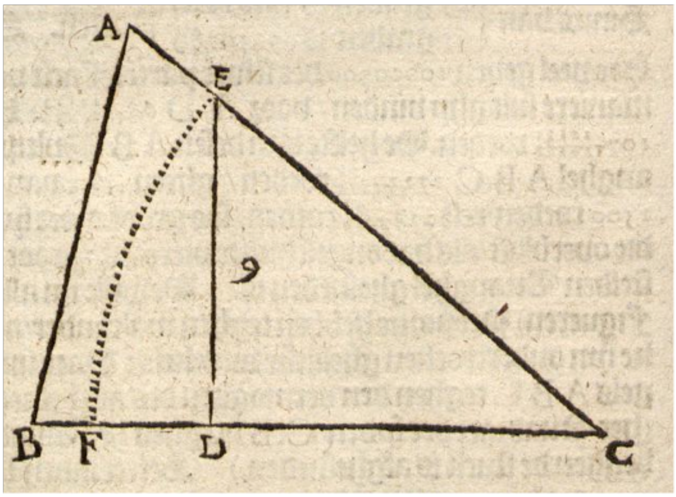
- Bereken CF met behulp van de vergrotingsfactor.

- Bereken EF en CE.

LUDOLPH VAN CEULEN
EXEMPEL 9 - Hoofdstuk 18

Hieronder volgt een opgave uit hoofdstuk 18 van *Vanden Cirkel* (1596) van Van Ceulen. Hoofdstuk 18 heeft als titel: *Daer inne dat ghebruyck der voorgestelde Tafelen gheleert werdt.* Je gaat de opgave op twee manieren oplossen. De tweede manier komt uit het boek van Van Ceulen.

Exempel 9 (tekst van Van Ceulen)



In desen Trianghel is den Winckel C groot 41 graden. Ende men begheert daer van te snijden (met een rechte Linie) eenen rechthoekighen Trianghel/ groot zijnde 4000 roeden int viercant.
Vraghe: Nae elcke sijde des afghesneden Trianghels.

Voorbeeld 9 (vertaling)

In driehoek ABC is $\angle C = 41°$. Men wil hier met een lijn DE loodrecht op BD van afsnijden een rechthoekige driehoek met oppervlakte 4000 roeden^2.
Gevraagd: Hoe lang zijn CD, CE en DE?

Oplossing met algebra

Je weet de oppervlakte van $\triangle CED$, maar je weet geen enkele zijde. Je weet wel een hoek en daarom kan je het volgende doen. Stel $CE = x$ en maak daarmee een vergelijking die je op kan lossen.

- Stel: $CE = x$.

  $\sin \angle C = \frac{...}{...}$ Vul in wat je weet: $\sin 41 = \frac{...}{x}$ dus $DE = ...$ (1)

  $\cos \angle C = \frac{...}{...}$ Vul in wat je weet: $\cos 41 = \frac{...}{x}$ dus $CD = ...$ (2)

- Vul (1) en (2) in in de formule voor de oppervlakte:
  Oppervlakte $\triangle CEF = \frac{1}{2} \cdot CD \cdot DE = ... = 4000$ roeden^2.
- Los de vergelijking op. Dus $CE = ...$
- Bereken DE en CD met behulp van (1) en (2).

Oplossing van Van Ceulen met vergrotingsfactor

Van Ceulen werkt in deze opgaven met driehoeken waarvan de schuine zijde 10 000 000 is, omdat hij in zijn *Tafelen* voor deze situatie bij een bepaalde hoek de lengte van de overstaande zijde kan opzoeken. Met verhoudingen berekent hij vervolgens de gevraagde zijde uit de opgave. Van Ceulen werkte graag met grote getallen, omdat hij dan het werken met kommagetallen kon vermijden. Nu is het voor ons onhandig rekenen met een schuine zijde van 10 000 000, dus nemen we hier een schuine zijde van 10, maar een ander getal mag ook! Het lijkt vreemd, maar je zal zien dat het tot een oplossing leidt!

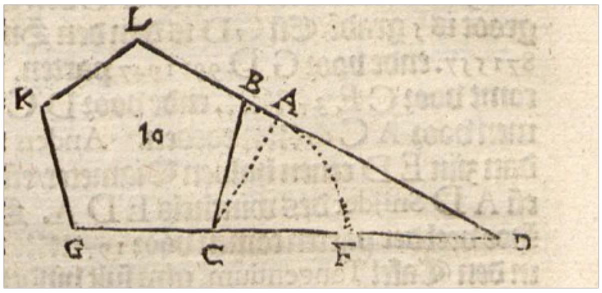
- Neem $CE = 10$. Bereken de oppervlakte van $\triangle CDE$ als je doorrekent met $CE = 10$.
- De werkelijke oppervlakte van $\triangle CDE$ is 4000 roeden^2. Bereken de vergrotingsfactor k. (Let op: je vergelijkt oppervlaktes met elkaar!)
- Bereken CE met behulp van de vergrotingsfactor.
- Bereken CD en DE.

LUDOLPH VAN CEULEN
EXEMPEL 10 - Hoofdstuk 18

Hieronder volgt een opgave uit hoofdstuk 18 van *Vanden Cirkel* (1596) van Van Ceulen. Hoofdstuk 18 heeft als titel: *Daer inne dat ghebruyck der voorgestelde Tafelen gheleert werdt.* Je gaat de opgave op twee manieren oplossen. De tweede manier komt uit het boek van Van Ceulen.

Exempel 10 (tekst van Van Ceulen)

Daer is een stuck Lands/ ghelijckformich desen hier neffens ghestelden Figuer/ is den winckel D bekent/ ende doet 26 graden. Van desen wilmen een stuck snijden/ met een rechte Linie/ ghetrocken van GD tot LD, groot zijnde 5000 roeden int viercant/ doch also dat den Winckel gemaect van der doorgetrocken Linie/ende den stuck der Basis groot is 81 graden.
Vraghe. Hoe lanck sal elcke Linie syn des afgesneden Triangels.



Voorbeeld 10 (vertaling)

Er is een stuk land gelijkvormig aan de hiernaast getekende figuur ($DLKG$). $\angle D = 26°$. Hiervan wil men een stuk snijden (CDB) met een oppervlakte van 5000 roeden^2, maar zo dat $\angle BCD = 81°$.
Gevraagd: Hoe lang zijn de zijden van de afgesneden driehoek (BD, BC en CD)?
(N. B. Uit de vraag blijkt pas dat Van Ceulen met het afgesneden stuk het driehoekige stuk CDB bedoelt. In de opgave is bovendien niet duidelijk welke hoek 81° is. Dit blijkt pas uit de uitwerkingen die Van Ceulen bij de opgave geeft.)

Oplossing met algebra

Je weet de oppervlakte van $\triangle CBD$, maar je weet geen enkele zijde. Je weet ook een hoek en daarom kan je het volgende doen. Stel $CF = x$ en maak daarmee een vergelijking die je op kan lossen.

- Teken als hulplijn $AC \perp BD$.

- Bereken $\angle ACD$.
- Bereken $\angle ACB$.
- Bereken $\angle ABC$.
- Stel: $AC = x$.

  $\tan \angle ABC = \frac{...}{...}$ Vul in wat je weet: tan ... = $\frac{x}{...}$ dus $AB = ...$ (1)

  $\tan \angle ADC = \frac{...}{...}$ Vul in wat je weet: tan ... = $\frac{x}{...}$ dus $AD = ...$ (2)

- Vul (1) en (2) in in de formule voor de oppervlakte:
  Oppervlakte $\triangle BCD = \frac{1}{2} \cdot BD \cdot AC = ... = 5000$ roeden^2.
- Los de vergelijking op. Dus $CF = ...$
- Bereken AB en AD met behulp van (1) en (2).
- Bereken BD, BC en CD.

Oplossing van Van Ceulen met vergrotingsfactor

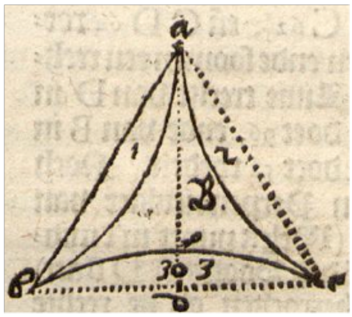
Van Ceulen werkt in deze opgaven met driehoeken waarvan de schuine zijde 10 000 000 is, omdat hij in zijn *Tafelen* voor deze situatie bij een bepaalde hoek de lengte van de overstaande zijde kan opzoeken. Met verhoudingen berekent hij vervolgens de gevraagde zijde uit de opgave. Van Ceulen werkte graag met grote getallen, omdat hij dan het werken met kommagetallen kon vermijden. Nu is het voor ons onhandig rekenen met een schuine zijde van 10 000 000, dus nemen we hier een schuine zijde van 10, maar een ander getal mag ook! Het lijkt vreemd, maar je zal zien dat het tot een oplossing leidt!

- Stel $AC = 10$ en bereken de oppervlakte van $\triangle BCD$ als je doorrekent met $AC = 10$.
- De werkelijke oppervlakte van $\triangle CDE$ is 5000 roeden^2.
  Bereken de vergrotingsfactor k. (Let op: je vergelijkt oppervlaktes met elkaar!)
- Bereken BD met behulp van de vergrotingsfactor. (BC en CD hoef je nu niet nog een keer te berekenen.)

LUDOLPH VAN CEULEN
EXEMPEL 2 - Hoofdstuk 19

Hieronder volgt een opgave uit hoofdstuk 19 van *Vanden Cirkel* (1596) van Van Ceulen. Hoofdstuk 19 heeft als titel: *Daer inne vervolgende dat gebruyck der Tafelen werdt beschreven/ door metinghe der Velden/ die met cromme Linien/ ende mede met rechte ende cromme Linien werden besloten.* Je gaat de opgave op twee manieren oplossen. De tweede manier komt uit het boek van Van Ceulen.

Exempel 2 (tekst van Van Ceulen)



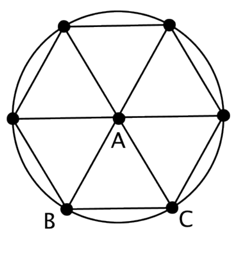
Daer is een Triangel met dry ingheboghen Circkellinien/besloten als hier neffens de Figuer/gheteeckent met B, waer van elcke Boghe is $\frac{1}{6}$ eenes gheheelen Circkels/ wiens Diameter doet 720 roeden.
Vraghe, hoe groot is den Triangel met de cromme Linien besloten?

Voorbeeld 2 (vertaling)

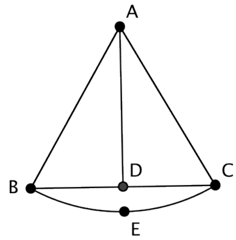
ABC is een driehoek die door drie naar binnen gebogen cirkelbogen begrensd wordt. Elke boog is $\frac{1}{6}$ van een cirkel met diameter 720 roeden.
Gevraagd: Hoe groot is de oppervlakte van de figuur ABC binnen de cirkelbogen?

Oplossing zonder vergrotingsfactor

In de figuur hier schuin onder zijn 6 gelijke driehoeken getekend in een cirkel. Boog BC is $\frac{1}{6}$ van een cirkel en $\triangle ABC$ is een gelijkzijdige driehoek met hoeken van 60°.

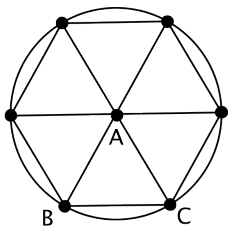


- De diameter van de cirkel is 720 roeden.
  Bereken AB.
- Bereken BC.
- Bereken de hoogte AD van $\triangle ABC$.



- Bereken de oppervlakte van $\triangle ABC$.
- De boog BEC hoort bij $\frac{1}{6}$ cirkel.
  Bereken de oppervlakte van het cirkelsegment $ABEC$.
- Bereken de oppervlakte van het deel $BECD$.
- Bereken de oppervlakte van de figuur ABC zoals gevraagd door Van Ceulen.

Oplossing van Van Ceulen met vergrotingsfactor



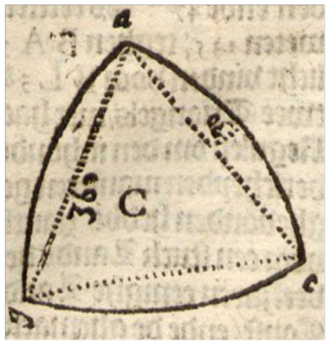
- Neem voor de diameter van de cirkel 2.
  Bereken de oppervlakte van de cirkel.
- Bereken de oppervlakte van 1 driehoek.
- Bereken de oppervlakte van de 6 segmenten samen, die je overhoudt als je de oppervlakte van 6 driehoeken van de cirkel afhaalt.
- Bereken de oppervlakte van 3 segmenten.
- Bereken de oppervlakte van figuur ABC zoals gevraagd door van Ceulen (nog steeds met diameter 2).
- Je hebt nu de oppervlaktes uitgerekend voor een cirkel met straal 1.
  Maak nu gebruik van de vergrotingsfactor om de oppervlakte te berekenen voor de situatie uit het vraagstuk van Van Ceulen.
  (Let op: je vergelijkt oppervlaktes met elkaar.)

LUDOLPH VAN CEULEN
EXEMPEL 3a - Hoofdstuk 19

Hieronder volgt een opgave uit hoofdstuk 19 van *Vanden Cirkel* (1596) van Van Ceulen. Hoofdstuk 19 heeft als titel: *Daer inne vervolgende dat gebruyck der Tafelen werdt beschreven/ door metinghe der Velden/ die met cromme Linien/ ende mede met rechte ende cromme Linien werden besloten.* Je gaat de opgave op twee manieren oplossen. De tweede manier komt uit het boek van Van Ceulen.

Exempel 3 (tekst van Van Ceulen)

Daer is een Triangel besloten met dry cromme uytgheboghen Linien/ als hier gheteeckent staet met C, ende elcke cromme Linie is $\frac{1}{6}$ eenes Circkels omloop/ ende soomen de houcken met rechte Linien t'samen treckt/ Comt den ghelijcksydighen Triangel BAC/ doet elcke syde 360 roeden.
Vraghe. Naer de groote des Triangels/ met de cromme Linien besloten?

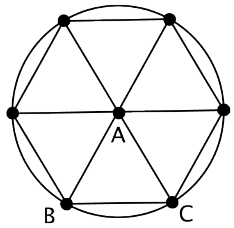


Voorbeeld 3 (vertaling)

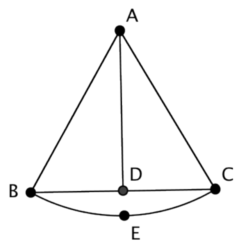
ABC is een driehoek die door drie naar buiten gebogen cirkelbogen begrensd wordt. Elke boog is $\frac{1}{6}$ van een cirkel. $\triangle ABC$ (rechte lijnen) is een gelijkzijdige driehoek met zijden van 360 roeden.
Gevraagd: Hoe groot is de oppervlakte van de figuur ABC binnen de cirkelbogen?

Oplossing zonder vergrotingsfactor

In de figuur hier schuin onder zijn 6 gelijke driehoeken getekend in een cirkel. Boog BC is $\frac{1}{6}$ van een cirkel en $\triangle ABC$ is een gelijkzijdige driehoek met hoeken van 60°.

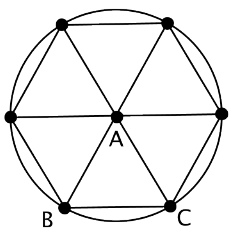


- De zijdes van de driehoeken zijn 360 roeden.
  Hoe lang is de straal van de cirkel.
- Bereken de hoogte AD van $\triangle ABC$.
- Bereken de oppervlakte van $\triangle ABC$.



- De boog BEC hoort bij $\frac{1}{6}$ cirkel.
  Bereken de oppervlakte van het cirkelsegment $ABEC$.
- Bereken de oppervlakte van het deel $BECD$.
- Bereken de oppervlakte van de figuur ABC zoals gevraagd door Van Ceulen.

Oplossing van Van Ceulen met vergrotingsfactor



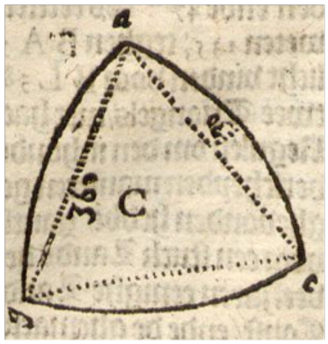
- Neem voor de diameter van de cirkel 2.
  Bereken de oppervlakte van de cirkel.
- Bereken de oppervlakte van 1 driehoek.
- Bereken de oppervlakte van de 6 segmenten die je overhoudt als je de oppervlakte van 6 driehoeken van de cirkel afhaalt.
- Bereken de oppervlakte van 3 segmenten.
- Bereken de oppervlakte van figuur ABC zoals gevraagd door van Ceulen (nog steeds met diameter 2).
- Je hebt nu de oppervlaktes uitgerekend voor een cirkel met straal 1.
  Maak nu gebruik van de vergrotingsfactor om de oppervlakte te berekenen voor de situatie uit het vraagstuk van Van Ceulen.
  (Let op: je vergelijkt oppervlaktes met elkaar!)

LUDOLPH VAN CEULEN
EXEMPEL 3b - Hoofdstuk 19

Hieronder volgt een opgave uit hoofdstuk 19 van *Vanden Cirkel* (1596) van Van Ceulen. Hoofdstuk 19 heeft als titel: *Daer inne vervolgende dat gebruyck der Tafelen werdt beschreven/ door metinghe der Velden/ die met cromme Linien/ ende mede met rechte ende cromme Linien werden besloten.* Je gaat de opgave op twee manieren oplossen. De tweede manier komt uit het boek van Van Ceulen.

Exempel 3 (tekst van Van Ceulen)

Daer is een Triangel besloten met dry cromme uytgheboghen Linien/ als hier gheteeckent staet met C, ende elcke cromme Linie is $\frac{1}{4}$ eenes Circkels omloop/ ende soomen de houcken met rechte Linien t'samen treckt/ Comt den ghelijcksydighen Triangel BAC/ doet elcke syde 360 roeden.
Vraghe. Naer de groote des Triangels/ met de cromme Linien besloten?

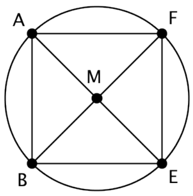


[h]

Voorbeeld 3 (vertaling)

ABC is een driehoek die door drie naar buiten gebogen cirkelbogen begrensd wordt. Elke boog is $\frac{1}{4}$ van een cirkel. $\triangle ABC$ (rechte lijnen) is een gelijkzijdige driehoek met zijden van 360 roeden.
Gevraagd: Hoe groot is de oppervlakte van de figuur ABC binnen de cirkelbogen?

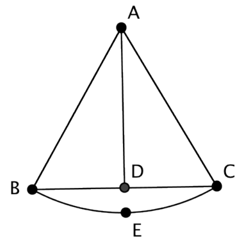
Oplossing zonder vergrotingsfactor



- In de figuur hiernaast zie een vierkant dat precies in een cirkel past.
  $AB = 360$ roeden
  Bereken de oppervlakte van $ABEF$.
- Bereken de diameter BF van de cirkel.

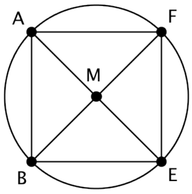
- Bereken de oppervlakte van de cirkel.

- Bereken de oppervlakte van de 4 segmenten die je overhoudt als je de oppervlakte van het vierkant van de oppervlakte van de cirkel afhaalt.
- Bereken de oppervlakte 1 segment.
- Bereken de oppervlakte van 3 segmenten.
- Nu moeten we de oppervlakte berekenen van de driehoek waar de segmenten aan vast zitten.
  Bereken de hoogte AD.
- Bereken de oppervlakte van $\triangle ABC$.
- Bereken de oppervlakte van de figuur ABC zoals gevraagd door Van Ceulen.



Oplossing van Van Ceulen met vergrotingsfactor

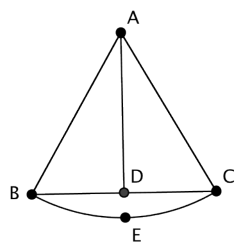
- Neem voor de diameter van de cirkel 2.
  Bereken de oppervlakte van de cirkel.
- Bereken AB.
- Bereken de oppervlakte van vierkant $ABEF$.



- Bereken de oppervlakte van de 4 segmenten die je overhoudt als je de oppervlakte van het vierkant van de oppervlakte van de cirkel afhaalt.
- Bereken de oppervlakte van 1 segment.
- Bereken de oppervlakte van 3 segmenten.

Nu moeten we de oppervlakte berekenen van de driehoek waar de segmenten aan vast zitten.

- Bereken de hoogte AD.
- Bereken de oppervlakte van $\triangle ABC$.
- Bereken de oppervlakte van de figuur ABC zoals gevraagd door Van Ceulen.



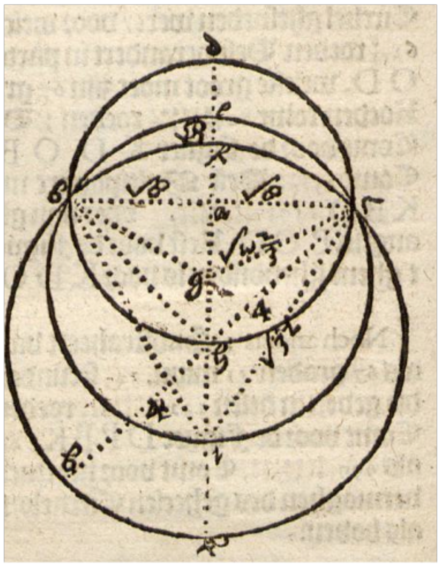
- Je hebt nu de oppervlaktes uitgerekend voor een cirkel met straal 1.
  Maak nu gebruik van de vergrotingsfactor om de oppervlakte te berekenen voor de situatie uit het vraagstuk van Van Ceulen.
  (Let op: je vergelijkt oppervlaktes met elkaar!)

LUDOLPH VAN CEULEN
EXEMPEL 7 - Hoofdstuk 19

Hieronder volgt een opgave uit hoofdstuk 19 van *Vanden Cirkel* (1596) van Van Ceulen. Hoofdstuk 19 heeft als titel: *Daer inne vervolgende dat gebruyck der Tafelen werdt beschreven/ door metinghe der Velden/ die met cromme Linien/ ende mede met rechte ende cromme Linien werden besloten.* Je gaat de opgave op twee manieren oplossen. De tweede manier komt uit het boek van Van Ceulen.

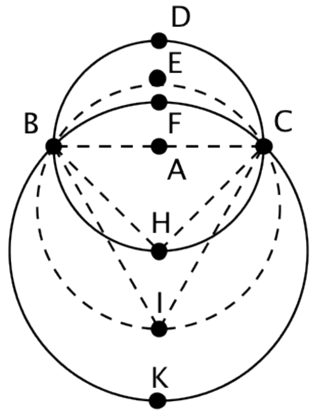
Exempel 7 (tekst van Van Ceulen)

Een plaetse met twee cromme Linien besloten als in deser figuer BDCF, is ghedeelt in twee onghelijcke deelen/ met de cromme Linie BEC. De rechte BC doet $\sqrt{32}$. *Den buytensten Boghe BDC is den halven omloop des Circkels BHCD. Ende den Boghe BFC is den vierendeel des omloops/ vanden Circkel BFCK. Item den Boghe BEC is* $\frac{1}{3}$ *des omloops vanden middelsten Circkel BECI.*
Vraghe. Naer de Maen gheteyckent met BDCF.



Voorbeeld 7 (vertaling)

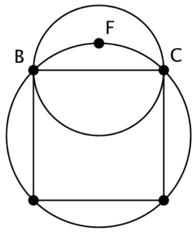
Het maanavormige stuk land $BDCF$ wordt begrensd door twee cirkelbogen. $BDCF$ wordt in twee ongelijke delen verdeeld door de kromme BEC. $BC = \sqrt{32} = 2\sqrt{8}$ en boog BDC is de halve omtrek van de cirkel $BHCD$. De boog BFC is $\frac{1}{4}$ van de omtrek van de cirkel $BFCK$. De boog BEC is $\frac{1}{3}$ van de omtrek van de cirkel $BECI$.
Gevraagd: Hoe groot is de oppervlakte van maan $BDCF$?



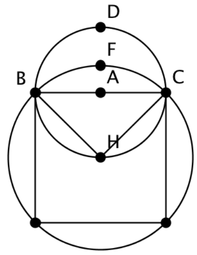
Oplossing zonder vergrotingsfactor

Voor de oppervlakte van $BDFC$ hebben we de middelste cirkel niet nodig. In de figuur hiernaast zie je de kleinste cirkel en de grootste cirkel.

- Hoe lang is de straal van de kleinste cirkel.
- Je weet dat de boog BFC $\frac{1}{4}$ van de omtrek van de grote cirkel is. BC is de zijde van een vierkant dat precies in een cirkel past.
  Bereken de straal van de grootste cirkel.



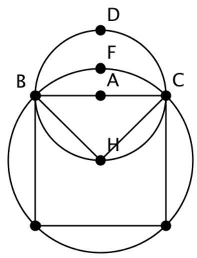
- Bereken de oppervlakte van de kleinste cirkel.
- Bereken de oppervlakte van de kwart cirkel $BFCH$.
- Bereken de oppervlakte van $\triangle BCH$ en van segment $BFCA$.
- Bereken de oppervlakte van maan $BDCF$.



Oplossing van Van Ceulen met vergrotingsfactor

Van Ceulen doet het anders. Hij schrijft: De oppervlaktes van de cirkels verhouden zich als de kwadraten van de diameters.

- Leg de uitspraak van Van Ceulen uit met behulp van het begrip vergrotingsfactor.
- $BDCA$ = ... deel van de kleine cirkel.
- $HBFC$ = ... deel van de grote cirkel.
- Je weet de straal van de grote en van de kleine cirkel.
  Leg uit dat oppervlakte $BDCA$ = oppervlakte $HBFC$.
- Haal van beide oppervlaktes het gezamenlijk deel $BFCA$ af.
  Dan hou je over opp ... = opp $\triangle$ ...
  Bereken deze oppervlakte.

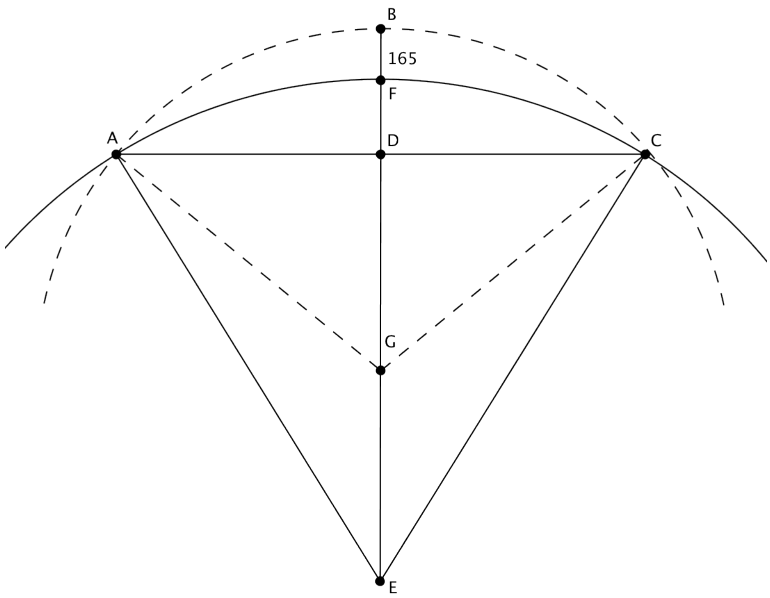


LUDOLPH VAN CEULEN
EXEMPEL 13a - Hoofdstuk 19

Hieronder volgt een opgave uit hoofdstuk 19 van *Vanden Cirkel* (1596) van Van Ceulen. Hoofdstuk 19 heeft als titel: *Daer inne vervolgende dat gebruyck der Tafelen werdt beschreven/ door metinghe der Velden/ die met cromme Linien/ ende mede met rechte ende cromme Linien werden besloten.*

Exempel 13 (tekst van Van Ceulen)

Daer is een vlack Veldt geleghen tusschen twee cromme Linien/ghelijckformigh eenen Maen/ als het voorgaende/ waer van den grootsten ende buytensten Boghe lanck is 64 graden ende de grootste breede is 165 roeden/ ende de spitse houcken zijn van malcander 1812 roeden.
Vraghe. Hoe groot is het vlacke Veldt AFCB.



Voorbeeld 13 (vertaling)

Een vlak veld in de vorm van een maan ligt tussen twee cirkelbogen. $\angle AEC$ is 64°. De grootste breedte (van het maanvormig veld) BF is 165 roeden. De afstand AC tussen de snijpunten van de bogen is 1812 roeden.
Gevraagd: Wat is de oppervlakte van het maanvormige veld $AFCB$?

Oplossing van Van Ceulen

- Bereken $\angle CED$ en bereken CE. (soscastoa)
- Bereken DE met de stelling van Pythagoras en bereken DF.
  (Je weet hoelang EF is ...)
- Bereken de oppervlakte van $ADCF$. (oppervlakte cirkelsegment – oppervlakte driehoek)
- Bereken BD.
- Bereken met AC en BD en propositie 50 de straal BG van de binnenste cirkel.
- Bereken $\angle DGC$ (soscastoa). Bereken de oppervlakte van $ADCB$. (oppervlakte cirkelsegment – oppervlakte driehoek)
- Bereken de oppervlakte van $AFCB$.