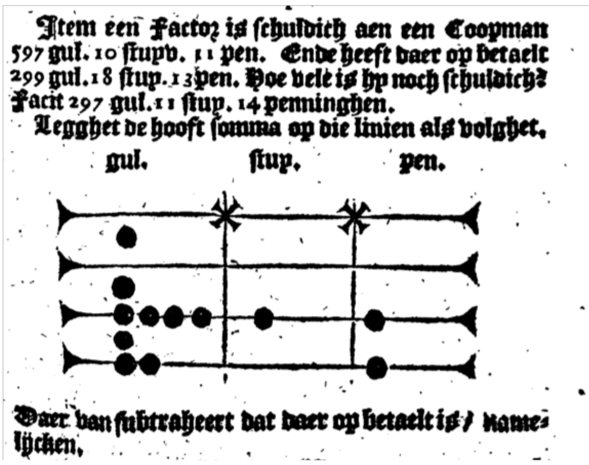
Van Interest
onder leiding van Ludolph van Ceulen
1540 –1610

Margot Rijnierse

1 In den beginne - het rekenonderwijs

In den beginne .. heel lang geleden, was er geen leerplicht en geen vastgesteld onderwijsprogramma. Tot 1200 werd onderwijs vooral gegeven in kloosters en bij kerken. Rekenen en wiskunde stonden niet op het programma. Pas rond 1400 kwamen scholen in handen van het stadsbestuur en ontstond er op school een bescheiden plaats voor rekenen.
De kooplieden uit die tijd klaagden over het rekenonderwijs. Ze huurden privédocenten in om hun kinderen het voor de handel benodigde rekenen bij te brengen.
Als mensen moesten rekenen kwam daar meestal geen griffel/lei of pen/papier maar een penningentafel aan te pas.



Figuur 1: penningentafel

Op zo'n penningentafel stonden een aantal lijnen, zie figuur 1. De onderste lijn was

voor de eenheden, de tweede lijn voor de tientallen, etc. Op die lijnen werden munten (penningen) gelegd. 21 werd gelegd met twee munten op de tweede lijn en één munt op de eerste lijn. Een munt tussen de eerste en tweede lijn stelde 5 voor en een munt tussen de tweede en de derde lijn 50. In figuur 1 zie je een afbeelding van het werken met zo'n penningentafel. Nadeel was dat je met een berekening de munten verschoof en de berekening niet terug kon lezen of narekenen. Het voordeel was dat je niet hoefde te kunnen lezen of schrijven.
Een ander obstakel bij het rekenen was het schrift. Lange tijd werden getallen geschreven met Romeinse cijfers. (C = 100, L = 50 etc.) Romeinse cijfers waren niet handig om mee te rekenen. Probeer ze maar eens onder elkaar te zetten om op te tellen of te vermenigvuldigen!
Pas vanaf ca 1200 gingen mensen de Hindoe-Arabische cijfers gebruiken, zoals wij dat nu nog doen. Dit bood nieuwe mogelijkheden: de betekenis van een cijfer hangt af van de positie van het cijfer in het getal. De 1 in 2143 staat voor 100. Dit geeft voordelen bij allerlei rekenbewerkingen, denk maar aan het optellen van grote getallen, waarbij je de getallen goed onder elkaar moet zetten. Hierbij is het essentieël dat je de getallen opschrijft en dus moet je kunnen lezen en schrijven en papier hebben of griffel/lei bezitten.

2 Van Ceulen

De opdrachten die we hierna bespreken zijn opdrachten uit *Vanden Circkel* [1] van Ludolph van Ceulen (Delft, 1596). Ludolph van Ceulen was schermleraar, wiskundige en een geweldige rekenmeester. Ludolph van Ceulen werd geboren op 28 januari 1540 in het Duitse plaatsje Hildesheim. Zijn vader was koopman. Toen Ludolph nog jong was overleden allebei zijn ouders. Waarschijnlijk is hij daarna met zijn twee broers naar Antwerpen getrokken. Omstreeks 1562 verhuisde hij naar Delft, waar hij rekenmeester en schermleraar werd, en later naar Leiden. De laatste jaren van zijn leven was hij docent aan de ingenieursopleiding in Leiden, ondergebracht bij de universiteit Leiden. Deze ingenieursopleiding was uniek in Europa, omdat er tot dan toe geen vakopleidingen op hoog niveau bestonden en omdat er in de landstaal werd onderwezen en niet in het Latijn. De opleiding heette dan ook *De Duytsche Mathematique*.
Veel ouders lieten hun kinderen lessen volgen bij privé-docenten (rekenmeesters) als Ludolph van Ceulen. Het werk van Ludolph loopt dan ook uiteen van het uitleggen van het positiestelsel van getallen en het omrekenen van ponden in penningen, miten en groten, tot meetkundige problemen waarmee hij zich kon meten met de beste Nederlandse en buitenlandse wiskundigen.

[1] Van Ceulen, L. 1596. *Vanden Circkel; Daerin gheleert werdt te vinden de naeste proportie des circkels-diameter tegen synen omloop...noch de tafelen sinuum, tangentium ende secantium...ten laetsten van interest* Jan Andriesz, Delft.

3 Van Interest

Het gebeurde op de schermschool regelmatig dat Van Ceulen met de ouders van leerlingen handelsvraagstukken besprak en daaronder vielen natuurlijk ook vraagstukken over interest. In het hoofdstuk *Van Interest* uit *Vanden Circkel* staan veel opgaven over enkelvoudige rente en rente op rente. Hij geeft voorbeelden van vragen die hem gesteld zijn, hij geeft commentaar op andere boekenschrijvers en hij verhaalt van overleg met andere wiskundigen. Het doel van Van Ceulen is de argeloze burger te wapenen tegen woekeraars.
Daarnaast wil Van Ceulen graag laten zien hoe goed hij kan rekenen. Hierdoor zijn de sommen soms wat gekunsteld en zal je deze berekeningen niet snel in de praktijk tegenkomen. Voor ons zijn dat vaak leuke sommen om te bestuderen. Hij lost sommige problemen op door vergelijkingen op te stellen, hetgeen in die tijd een tamelijk nieuwe techniek is. Hij meldt dit dan ook vol trots in de inleiding van zijn boek.
Hij besluit zijn werk met tabellen van verschillende rentepercentages. Deze tabellen zijn uitgebreider, in meer decimalen en voor meer rentepercentages dan die van zijn voorgangers. Van Ceulen heeft hiermee enorm veel werk verzet. De rekenmachine was er nog niet, dus alles moest met de hand. Om het rekenwerk voor lezers te besparen staan overal in het hoofdstuk interesttabellen die ook bij andere renteproblemen gebruikt konden worden.

3.1 Definities

Van Ceulen begint *Van Interest* met een aantal definities.
Alsmen Geldt uytleendt/om te ghebruycken eenen sekeren tijdt voorwaerde/ dat den schuldenaer (behalven de hooft-summe) een beloofde summa daer voor (aen dien die hem gheleendt heeft) sal betalen/ dan werdt de gheleende summa Capitael/ ende de beloofde penninghen ghewin ofte Interest ghenoemt.

Vertaling:
Als men geld uitleent om een bepaalde tijd te gebruiken, op voorwaarde dat de schuldenaar behalve de hoofdsom een beloofd bedrag hiervoor zal betalen, dan wordt het geleende bedrag kapitaal en het beloofde bedrag winst of interest genoemd.

We houden hier ook aan:
Kapitaal is het oorspronkelijk geleende bedrag, zonder winst.
Winst of interest betaal je bovenop het bedrag dat je terug moet betalen.
De terugbetaalde bedragen bestaan voor een deel uit interest en voor een deel uit terugbetaald kapitaal; dit terugbetaalde kapitaal noemen we de aflossing.

Van Ceulen meldt vervolgens: 'In Duitsland geeft men per 100 aan het eind van het jaar 5 winst en in de Nederlanden 1 per 16, oftewel: $6\frac{1}{4}$ per 100.'

Je ziet dat de afspraken over de winst op twee manieren geformuleerd kunnen worden.
In Duitsland was 5 ten 100 gangbaar. Dat betekent dat je voor iedere 100 die je leent per jaar 5 extra terug moet betalen. Wij zouden zeggen: de rente is 5%. In Nederland is in die tijd gangbaar 'van 16 één', of zoals ook vaak gezegd werd: 'de penning 16'. Dit betekent dat de schuldeiser per 16 kapitaal 1 winst rekent en dus moet de schuldenaar voor elke 16 die hij leent 17 terug betalen.

3.2 Rekenen met rente op rente en met simpel ghewin

Opdracht 1

a Hoeveel % rente betaal je als de schuldeiser 'de penning 16' vraagt?

b Hoeveel met 'de penning 17'?

c Hoeveel met 'de penning p'?

d Bij welke p is er sprake van 5 ten 100?

Toen het renterekenen nog in de kinderschoenen stond, werd er eenvoudig met rente omgesprongen. Van Ceulen noemt het 'simpel ghewin'. Tegenwoordig spreekt men van enkelvoudige rente. Met enkelvoudige rente reken je als volgt. Neem als rente 6,25%. Als je 100 leent dan moet je na 1 jaar 106,25 gulden terug betalen. Als je twee jaar leent moet je $100 + 2 \cdot 6,25$ terugbetalen en als je een half jaar leent moet je 103,125 terug betalen. Je kan deze bedragen ook op een andere manier bereken. 6,25% rente is 'de penning 16': als je 16 gulden een jaar leent, betaal je 17 gulden terug. 100 gulden een jaar lenen betekent dus dat je na een jaar $100/16 \cdot 17 = 106,25$ moet betalen als interest en kapitaal. Als je 16 gulden twee jaar leent betaal je 18 gulden terug. 100 gulden twee jaar lenen betekent dus dat je na twee jaar $100/16 \cdot 18 = 112,5$ gulden moet betalen als interest en kapitaal.

Opdracht 2

Je leent 100 gulden. Hoeveel je terug moet betalen hangt van twee dingen af: de leentijd en de rente die je afspreekt. Maak onderstaande tabellen af. Reken met 'simpel ghewin'. Enkelvoudige rente is tegenwoordig ongebruikelijk, maar je zal zien dat het niet moeilijk is!

rente: 4%	leentijd	terugbetalen	rente: 5%	leentijd	terugbetalen
	1	$100 + 1 \cdot 4 = 104$		1	...
	2	$100 + 2 \cdot 4 = 108$		2	...
	3	$100 + 3 \cdot 4 = 112$		3	...
	4	...		4	...
	5	...		5	...
	6	...		6	...

Van Ceulen maakte veel rentetabellen om met één tabel verschillende vraagstukken te kunnen oplossen en niet iedere keer het rekenwerk te hoeven doen. Bovendien konden anderen, ook mensen die niet goed konden rekenen, met deze tabellen op een eenvoudige manier hun berekeningen doen. Je kan met behulp van bovenstaande tabellen ook uitrekenen wat je moet betalen als je 400 gulden hebt geleend tegen 5% rente per jaar en na 3 jaar terug wil betalen. Als je 100 gulden leent moet je na 3 jaar 112 gulden terugbetalen. Als je 400 geleend hebt, moet je $4 \cdot 112 = 448$ gulden terugbetalen.

Opdracht 3

Een procentje meer of minder zou je denken, wat maakt het uit?
Als je 700 gulden leent tegen 4 % of tegen 5% en je wil na 5 jaar terugbetalen, hoeveel maakt dat uit? Reken met enkelvoudige rente.

Opdracht 4

Rente op rente of enkelvoudige rente, wat maakt het uit?

a Als je 300 gulden 5 jaar uitleent tegen 'de penning 16', hoeveel krijg je na 5 jaar terug met enkelvoudige rente? (rente per jaar: 6,25%)

b Als je 300 gulden 5 jaar uitleent tegen 'de penning 16', hoeveel krijg je na 5 jaar terug met rente op rente? (rente per jaar: 6,25%)

c Welke manier van renteberekenen levert de kredietverstrekker het meest op?

d Welke manier van renteberekenen vind je eerlijker en waarom?

Het gebeurt met aflossen vaak dat mensen ieder jaar hetzelfde bedrag terugbetalen tot de schuld afgelost is.
Je weet nu hoe je moet rekenen met 'simpel ghewin', bijvoorbeeld 5 % rente; 'de penning 20' per jaar. 'De penning 20' per jaar betekent: als je 20 uitleent krijg je na een

jaar 21 terug. 1 van de 20 is 5 %. 20 lenen voor een periode van 2 jaar betekent dat je 22 gulden terug moet betalen na 2 jaar. 100 gulden ($5 \cdot 20$) lenen voor een periode van 2 jaar betekent dat je $5 \cdot 22 = 110$ gulden moet terugbetalen na 2 jaar. Om nu te weten hoeveel je hebt afgelost als je 100 gulden terugbetaalt, moet je omgekeerd redeneren. Als je een bedrag terugbetaalt na één jaar, is daarvan $\frac{20}{21}$ aflossing en $\frac{1}{21}$ winst; van een terugbetaling van 100 gulden na één jaar is $\frac{1}{21} \cdot 100 = 4,76$ gulden winst en $100 - 4,76 = 95,24$ gulden aflossing. Als je een bedrag terugbetaalt na twee jaar, is daarvan $\frac{20}{22}$ aflossing en $\frac{2}{22}$ winst: van een terugbetaling 100 gulden na twee jaar is $\frac{2}{22} \cdot 100 = 9,09$ gulden winst en $100 - 9,09 = 90,91$ gulden aflossing. Je kijkt hier dus niet naar het totale bedrag dat je geleend hebt. Je berekent welke winst je moet betalen over het afgeloste bedrag.

Opdracht 5

Vul de volgende tabel in. Je hebt nu 6 jaar lang elk jaar 100 gulden terugbetaald. Hoeveel geld had je oorspronkelijk geleend?

berekening	rente: 5%	aflossing	leentijd	terugbetalen
$\frac{1}{21} \cdot 100 = 4,76; 100 - 4,76 = 95,24$		95,24	1	100
$\frac{2}{22} \cdot 100 = 9,09; 100 - 9,09 = 90,91$		...	2	100
		...	3	100
		...	4	100
		...	5	100
		...	6	100

Opdracht 6

We bekijken nog een keer het verschil tussen enkelvoudige rente en rente op rente.

a Je betaalt 3 jaar lang 100 gulden terug en je hebt geleend tegen 'de penning 16'. Welk bedrag heb je dan in totaal afgelost als je rekent met enkelvoudige rente?

b Je betaalt 3 jaar lang 100 gulden terug en je hebt geleend tegen 'de penning 16'. Welk bedrag heb je dan in totaal afgelost als je rekent met rente op rente?

c De twee bedragen lijken weinig te verschillen. Bereken met Excel hoe groot het verschil is tussen de afgeloste bedragen bij rente op rente en enkelvoudige rente, als je 15 jaar lang 100 gulden terugbetaalt.

3.3 Listighe Cooplieden

In de inleiding van *Van Interest* laat Van Ceulen de lezer zien hoe woekeraars te werk gaan en hij komt met voorbeelden die zich aan hem hebben voorgedaan. Hieronder volgen twee voorbeelden waarin hij wil laten zien op welke manieren mensen afgezet kunnen worden.

De Listighe Coopman

In een voorbeeld van Van Ceulen moet iemand 1500 (kapitaal + winst) gulden terug betalen met 100 gulden per jaar tegen enkelvoudige rente. De winst is 'de penning 16': voor 16 geleende guldens moet je er 17 terugbetalen. De honderd gulden die je elk jaar betaalt bestaat steeds uit een deel aflossing en een deel interest.

Opdracht 7

Wat was het geleende kapitaal? (zie opdracht 6)

De koopman die het geld uitgeleend heeft, komt met een andere berekening en Van Ceulen noemt hem dan ook een 'listige koopman'. De 'listige koopman' ziet het zo: 'de penning 16' betekent dat je per 100 gulden $6\frac{1}{4}$ gulden winst moet betalen. Je betaalt het eerste jaar 100 gulden terug. Daarvan is $100 - 6\frac{1}{4} = 93\frac{3}{4}$ gulden aflossing. Het tweede jaar betaal je weer 100 gulden en daarmee los je $100 - 2 \cdot 6\frac{1}{4} = 87,5$ gulden af.

Opdracht 8

Het lijkt erop alsof de koopman met enkelvoudige rente rekent. We gaan de berekeningen van de 'listige koopman' eens beter bestuderen.

a Het eerste jaar los je $93\frac{3}{4}$ gulden af en betaal je $6\frac{1}{4}$ gulden aan interest. Hoeveel % rente betaal je?

b Het tweede jaar los je 87,5 gulden af bij de listige koopman en betaal je 12,5 gulden aan interest. Hoeveel % rente betaal je?

c Wat klopt er niet in de redenering van de listige koopman?

d Hoeveel los je bij de listige koopman het vijftiende jaar nog af?

e Bereken (bijvoorbeeld met Excel) wat het totale geleende bedrag was bij de listige koopman.

Van Ceulen noemt deze manier van rekenen *argher dan woecker* en zegt dat hij *een sulcken ongod'lijckn rekeninghe niet en wilde aenvaerden*, waarna de koopman *met gramschap van my gescheyden is.*

3.4 Van simpel ghewin naar winsghewin

Hieronder volgen twee voorbeelden waarin Van Ceulen duidelijk maakt dat het rekenen met enkelvoudige rente problemen op kan leveren.

Van Ceulen Exempel 41

A leendt B 100 ℔ (Pond) *een Jaer op Interest/ daer voor belooft B te betalen 121 ℔ / dat is 100 ℔ gheleendt geldt/ ende 21 ℔ ghewin: het ghebeurt dat A over 6 maenden van B syn 100 ℔ voordert (ofte begheerdt) met soo veel ghewin hem van rechts weghen toe comt.*
Vraghe. Hoe veel behoort B voor ghewin te betalen?

A heeft 100 ℔ voor een jaar aan B uitgeleend met de afspraak dat B na een jaar 121 ℔ terug zal betalen. A wil nu door omstandigheden na een half jaar zijn geld al terug.
De discussie die nu onstaat geeft de beperkingen van simpel gewin.
Je kan de tekst van Van Ceulen lezen als dialoog tussen persoon A en persoon B, die er allebei niet bij in willen schieten. Het verlossende woord komt van persoon C (rekenmeester Van Ceulen..??).

A Zou u dat geleende geld eerder terug willen betalen? Ik weet dat ik het u eigenlijk een jaar had uitgeleend, maar ik heb het nu, na een half jaar al nodig. U hoeft natuurlijk geen 121 ℔ terug te betalen maar $110\frac{1}{2}$ ℔ , want u hebt het geld maar een half jaar geleend.

B Ik ben bereid u te betalen tegen de voornoemde rente, maar als ik $110\frac{1}{2}$ ℔ terugbetaal en u leent dit bedrag weer een half jaar uit tegen dezelfde rente, dan komt u uit op $122\frac{41}{400}$ ℔. Dat is hoger dan de 121 ℔ die u in eerste instantie van mij zou ontvangen en dus zou ik teveel terugbetaald hebben.
Als ik $109\frac{111}{221}$ ℔ terugbetaal en u leent dat hele bedrag opnieuw uit tegen dezelfde rente, komt u na een half jaar precies op 121 ℔ .

A Als de volgende persoon die ik het een jaar ga lenen op dezelfde manier na een half jaar terugbetaalt, heb ik geen 21 ℔ winst gemaakt. Ik ga hiermee dus niet akkoord.

C Laten we ervan uitgaan uit van B na 6 maanden x terugbetaalt, dit is kapitaal en winst. Maak een verhoudingstabel : 100 geeft x als kapitaal en winst. A wil na een jaar 121 in handen hebben. x moet 121 als kapitaal en winst opleveren.

kapitaal	100	x
kapitaal + winst	x	121

Opdracht 9

a Hoeveel winst zou A in een jaar maken als hij zijn eerste redenering aanhoudt en het geld twee keer een half jaar uitleent?

b B heeft gelijk dat A in eerste instantie teveel zou krijgen. Het bedrag dat B noemt klopt niet met zijn eigen redenering. Welk bedrag zou A na het tweede half jaar ontvangen als hij van B $109\frac{111}{221}$ ℔ ontvangt en dezelfde rente aanhoudt als die hij het eerste half jaar heeft gehad?
B komt op 121 ℔ uit. Hier zit een grappige redeneerfout in. Kan je die eruit halen?

c C geeft de oplossing door niet meer te rekenen met simpel ghewin, maar met rente op rente, zoals B ook probeerde. Bereken op de manier van C wat B aan A moet betalen.

Opdracht 10
Van Ceulen Exempel 54

A is B schuldigh 110 ℔ te betalen over een jaer: Het gebeurdt datse met malcander over comen/ alsoo dat A de penninghen ghebruycken sal 4 jaer lanck/ ende betalen over 4 jaer voor Capitael ende simpel ghewin/ teghen den penningh 10 in't jaer. Den tijdt omghecomen zijnde/ wil B van A hebben 143 ℔ , voor schulde ende simpel Interest/ ende A wil niet meer betalen als 140 ℔ . Vraghe. Wie van beyden onghelijck heeft?
Ook hier betreft de discussie het berekenen van de interest na het veranderen van de afspraken over de leentijd.
A leent 100 ℔ (Pond) van B tegen 10 ten 100 in 't jaar. (10 ten 100: 10% rente per jaar) Hij leent het bedrag 1 jaar en moet na dat jaar 110 ℔ terugbetalen. Ze komen echter na een jaar overeen dat A het geld nog 3 jaar mag houden. Ze zijn het niet eens over de interest die A na verloop van vier jaar moet betalen.

B argumenteert teghen A alsoo: U is bekendt dat ghy mijn schuldigh waert/voorleden dry jaren (drie jaar geleden) *110 ℔. Als nu 10 wint 1 in't Jaer/ soo moeten 110 winnen in 3 jaren 33 ℔ . Dese ghedaen by 'tghene ghy mijn voor dry jaren schuldigh waerdt/ Comt t'samen 143 ℔ voor gheleendt geldt ende simpel ghewin.*

a Leg uit hoe B aan het bedrag van 143 ℔ komt.

A: Het is gheleden 4 ende niet 3 jaer/ dat ick met u overquam (overeen kwam)/ *'tghene ick u schuldigh was/ welcke schuldt toen was 100 ℔ te rekenen den penningh 10 in 't jaer. Dese bekenne ick ghebruyckt te hebben 4 jaren/ ende niet 110 ℔ (als ghy segt) 3 Jaer: Daerom ben ick u schuldigh niet meer als 140 ℔, meer comt u niet naer simpel interest te rekenen.*

b Leg uit hoe A aan het bedrag van 140 ℔ komt.

B: Op dien tijdt ick u toe liet mijn geldt te gebruycken/ waert ghy my schuldigh 110 ℔ / nu dry jaren geleden/ Aengaende dat ghy segt de 110 Capitael dry jaer geleden/ waren nu 4 jaren gheleden 100 ℔ gereedt waerdigh (kapitaal waard). *Op de selve maniere kunt ghy rekenen dat de 110 ℔ 12 jaer voor den tijdt waren gereedt waerdigh 50 ℔, de selve aengeleydt 15 jaer (omdat 12 ende 3 maken 15) naer simpel interest/ soude my niet meer comen als 125 ℔, welcke rekeninghe my niet (noch niemant) behaghen soude.*

c B geeft als voorbeeld dat je, volgens de redenering van A, ook 12 jaar geleden 50 ℔ geleend zou kunnen hebben. Leg uit hoe B vervolgens aan het bedrag van 125 ℔ komt.

A beticht B er vervolgens van niet met simpel ghewin maar met winsghewin te rekenen!
Van Ceulen eindigt deze twist met de mededeling dat het verstandig is om van te voren duidelijk de afspraken op papier te zetten! Zonder duidelijke afspraken valt niet te zeggen wie er gelijk heeft.
Je ziet hier wel waar het spaak loopt met het simpel gewin. Als A en B rente op rente hadden gerekend, dan was deze discussie niet aan de orde geweest.

d A gaat uit van het bedrag dat hij oorspronkelijk geleend heeft; B gaat uit van het bedrag dat hij na een jaar terug gekregen zou hebben. Laat zien dat A en B aan het eind van de extra drie jaar op hetzelfde eindresultaat uitkomen als ze met rente op rente rekenen. Neem als rente 10%.

Kredietcrisis

Nog één keer laat Van Ceulen een woekeraar aan het woord als afschrikwekkend voorbeeld. Het volgende praktijkvoorbeeld gaat over de verkoop van een huis. Het is in die tijd gebruikelijk om een huis te kopen met jaarlijkse afbetalingen. Tegenwoordig regelen we dat met een hypotheek bij een bank; toen werden die jaarlijkse afbetalingen direct aan de verkoper gedaan. De verkoper krijgt dus bij de verkoop van zijn huis het verkoopbedrag niet meteen in handen. Dat kan de verkoper in de problemen brengen. Van Ceulen geeft het volgende voorbeeld. Iemand heeft zijn huis verkocht. De koper heeft het bedrag, 915,28 gulden, niet ineens en betaalt met jaarlijkse betalingen tegen

een redelijke rente. Eigenlijk heeft de verkoper het hele bedrag meteen nodig en hij zoekt een koopman aan wie hij de jaarlijkse betalingen door kan verkopen in ruil voor contant geld. En dan lijkt het wel kredietcrisis: hij kan geen lening krijgen tegen een redelijk tarief en gaat accoord met een hoge rente.
Dan zegt Van Ceulen:
Maer selden (Godt betert) werden sulcke Coop-lieden ghevonden/ die haer rekeninghe maecken naer den redelijcken ghewin/ teghen 'den penningh' 16: Maer veele die begeeren te corten/ tegen 9, 10, 11, 12 ten 100 in 't Jaer: (als my wel bekendt is).
Maar zelden vind je een koopman die een redelijke winst rekent als 'de penning 16'. Velen eisen 9, 10, 11, of 12 ten 100 in een jaar.

Wat is er aan de hand? Iemand verkoopt een huis voor 915,28 gulden en zal in 14 jaar 1400 gulden (kapitaal en winst) ontvangen, 100 gulden per jaar, tegen een rente van 16 ten 100: $6\frac{1}{4}$%. Van Ceulen rekent hier met rente op rente, zoals wij dat tegenwoordig ook doen.
Nu heeft de verkoper zelf het hele bedrag ineens nodig en hij verkoopt de lening door aan een woekeraar. Hij krijgt van de woekeraar 915,28 gulden (het uitgeleende kapitaal). De woekeraar spreekt het volgende met hem af: de verkoper moet 100 gulden per jaar afbetalen, maar tegen 10 ten 100 in het jaar (10% rente).

Opdracht 11

a Hoeveel heeft de verkoper aan de woekeraar afbetaald na 14 jaar?

De eerste 14 jaar had de verkoper geen probleem; hij kreeg uit de verkoop van zijn huis steeds 100 gulden per jaar en hij betaalde die meteen door aan de woekeraar. Het veertiende jaar bestond de 100 gulden die de verkoper aan de woekeraar betaalde uit 73,67 gulden winst en 26,33 gulden aflossing.

b Reken met Excel uit hoelang de verkoper nog 100 gulden per jaar af moet betalen. Al deze jaren moet hij 100 gulden per jaar betalen terwijl de betalingen uit zijn eigen verkoop al gestopt zijn.

Het is niet zo slim van de verkoper geweest om met de rente van 10% akkoord te gaan, als hij zelf $6\frac{1}{4}$% vraagt. De geldschieter loopt wel een zeker risico en dat kan hij in rekening brengen door een hogere rente te vragen.
Tegenwoordig lenen we niet meer bij degene die het huis verkoopt, maar bij de bank. De verkoper van het huis krijgt meteen het geld waar hij recht op heeft. De koper van het huis regelt zijn zaken met de bank.
Van Ceulen maakt zich erg boos over woekeraars en spreekt de wens uit dat hij zoveel opgaven hier zal laten zien dat dit de mensheid zal behoeden voor dit soort woekerpremies. Er volgen 176 opgaven om te leren en te oefenen.

4 Uitwerkingen

Opdracht 1
a Je moet berekenen hoe vaak 16 in 100 past: $100 : 16 = 6\frac{1}{4}\%$
b 100/17 = 5,88%
c $100/p$
d p = 20

Opdracht 2

rente: 4%	leentijd	terugbetalen	rente: 5%	leentijd	terugbetalen
	1	$100 + 1 \cdot 4 = 104$		1	$100 + 1 \cdot 5 = 105$
	2	$100 + 2 \cdot 4 = 108$		2	$100 + 2 \cdot 5 = 110$
	3	$100 + 3 \cdot 4 = 112$		3	$100 + 3 \cdot 5 = 115$
	4	$100 + 4 \cdot 4 = 116$		4	$100 + 4 \cdot 5 = 120$
	5	$100 + 5 \cdot 4 = 120$		5	$100 + 5 \cdot 5 = 125$
	6	$100 + 6 \cdot 4 = 124$		6	$100 + 6 \cdot 5 = 130$

Opdracht 3
4%: $7(100 + 5 \cdot 4) = 840$ gulden 5%: $7(100 + 5 \cdot 5) = 875$ gulden Met 5% rente betaal je 35 gulden meer.

Opdracht 4
a $3(100 + 5 \cdot 6\frac{1}{4}) = 393,75$ gulden
b $300 \cdot 1,0625^5 = 406,22$ gulden
c rente op rente
d ..

Opdracht 5

			aflossing	leentijd	terugbetalen
$\frac{1}{21}$	$\cdot 100 =$	$4,76$	95,24	1	100
$\frac{2}{22}$	$\cdot 100 =$	$9,09$	90,91	2	100
$\frac{3}{23}$	$\cdot 100 =$	$13,04$	86,96	1	100
$\frac{4}{24}$	$\cdot 100 =$	$16,67$	83,33	1	100
$\frac{5}{25}$	$\cdot 100 =$	20	80,00	1	100
$\frac{6}{26}$	$\cdot 100 =$	$23,08$	76,92	1	100

Totaal geleend bedrag: 513,36 gulden

Opdracht 6
a $\frac{16}{17} \cdot 100 + \frac{16}{18} \cdot 100 + \frac{16}{19} \cdot 100 = 267,22$ gulden
b $100 : 1,0625 + 100 : 1,0625^2 + 100 : 1,0625^3 = 266,07$ gulden
c enkelvoudige rente: 1034,43 gulden kapitaal; rente op rente 955,55 gulden kapitaal

Opdracht 7
Totale geleende bedrag: 1034,43 gulden.

Opdracht 8
a $\frac{6{,}25}{93{,}75} = 6,7\%$
b $\frac{12{,}5}{87{,}5} = 14,3\%$
c Hij rekent rente over 100 gulden maar dat is kapitaal + winst.
d $15 \cdot 6,25 = 93,75$ gulden. Je lost nog 6,25 gulden af.
e Totale geleende bedrag: 750 gulden

Opdracht 9
a $\frac{10{,}5}{100} \cdot 110,5 + 110,5 = 122\frac{41}{400}$
b Het terugbetaalde bedrag was $109\frac{111}{221} = 109,5022624$.
Als je voor het volgende jaar hetzelfde rentepercentage aanhoudt is dat $9\frac{111}{221}$
voor een half jaar. Dus $(109\frac{111}{221}) : 100 \cdot 109\frac{111}{221} = 119,90745$ ..
B heeft als volgt geredeneerd: $x + x \cdot \frac{10{,}5}{100} = 121$ geeft $x = 109\frac{111}{221}$.
Hier zit een grappige redeneerfout in. B wil voor het eerste half jaar geen 10,5 interest per 100 betalen, maar rekent voor het tweede half jaar wel met 10,5 interest per 100.
c Als je deze rente ook aanhoudt in het tweede half jaar wordt het nieuwe bedrag
$x \cdot \frac{x}{100} = 121$; $x^2 = 12100$, dus x moet 110 zijn. Zo veel moet B aan A betalen.

Opdracht 10
a B had na 1 jaar terug zullen krijgen 110 ℔. Hij leent die 110 ℔ nog 3 jaar uit.
3 jaar betekent $3 \cdot 11$ interest dus 143 ℔terugbetalen.
b A heeft 100 ℔ geleend voor de duur van 4 jaar tegen 10 ten 100.
4 jaar betekent 40 ℔ interest dus 140 ℔ terugbetalen.
c 50 ℔ met 10 ten 100 lenen is 5 winst per jaar; 12 jaar lenen geeft 60 ℔ winst en een totaalbedrag van 110 ℔. 15 jaar lenen geeft 75 ℔ als interest en een totaalbedrag van 125 ℔.
d A komt uit op $100 \cdot 1,1^4$ en B komt uit op $100 \cdot 1,1$ voor het bedrag dat hij na een jaar zou krijgen en rekent dan drie jaar verder $100 \cdot 1,1 \cdot 1,1^3 = 100 \cdot 1,1^4$.

Opdracht 11
a 736,67 gulden
b Na 26 jaar heeft hij zijn schulden afbetaald. Hij moet dus nog 12 jaar door blijven betalen.