Goochelen met oppervlaktes van driehoeken
Niet rekenen maar tekenen
onder leiding van Ludolph van Ceulen
1540 – 1610

Margot Rijnierse

Inleiding

Basiskennis: oppervlakte driehoek is $\frac{1}{2} \cdot$ basis $\cdot$ hoogte.

Ludolph van Ceulen was rond 1600 wiskundeleraar en 'rekenmeester' in Delft. Hij schreef "De Fondamenten", waarin hij veel reken- en wiskunderegels op een rij zette. Deze regels noemde hij proposities. Hij bewees dat deze regels kloppen, zodat anderen (zoals wij) ze kunnen gebruiken. Wij zullen gebruik maken van propositie 24 en propositie 28 van Van Ceulen.
In die tijd vond men het belangrijk om meetkundige problemen op een meetkundige manier op te lossen, dus met constructies/tekeningen. Je gaat daarom in deze opdracht niet rekenen aan driehoeken, maar met constructies/tekeningen vraagstukken oplossen. Het is bij deze opdrachten dus belangrijk dat je netjes tekent!
Eén opmerking vooraf: als in de tekst staat 'even groot' 'of gelijk' bedoelen we 'een even groot oppervlakte'.

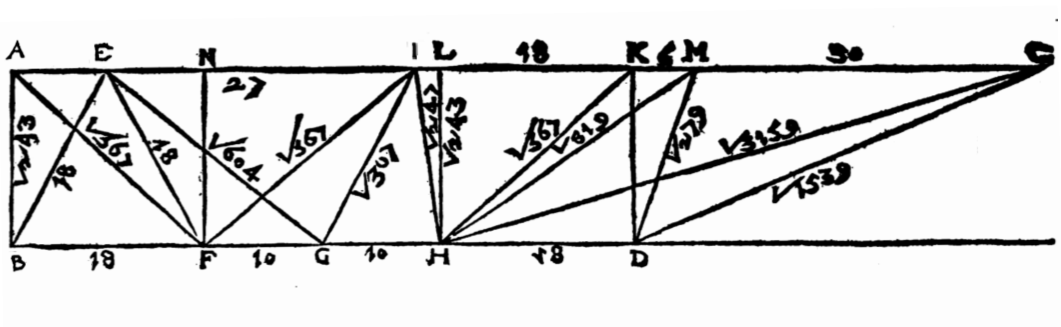
Opdracht 1

Het Nederlands uit die tijd ziet er anders uit dan het Nederlands van nu. Toch kunnen we het redelijk lezen, kijk maar naar propositie 24.

Propositie 24

Alle Tryangels tusschen parallel Linien staende, op eenen ofte ghelijcken Basis zijn malcander ghelijck.

(*Tryangel*: driehoek)



Figuur 1

Kijk in figuur 1. Gegeven is: BD en AC zijn evenwijdig.
Ludolph van Ceulen geeft als voorbeeld: de oppervlaktes van $\triangle BFA$ en $\triangle BFE$ zijn gelijk.

a Je weet hoe je de oppervlakte van een driehoek moet berekenen. Welke gegevens heb je nodig om de oppervlaktes van $\triangle BFA$ en $\triangle BFE$ te berekenen?

. . . .

b Leg uit met behulp van dit voorbeeld wat propositie 24 beweert.

. . . .

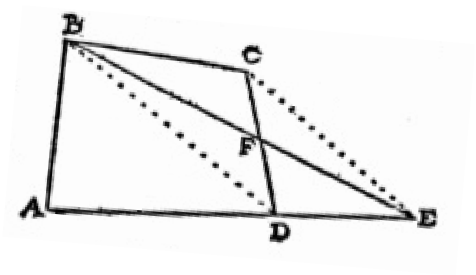
c Kleur in figuur 1 de driehoeken die even groot zijn als $\triangle HDM$ en die HD als basis hebben.

d Welke driehoek is even groot als $\triangle BFA$ en $\triangle FGI$ samen?

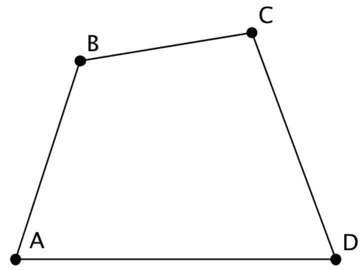
. . . .

Opdracht 2

Met behulp van propositie 24 van Van Ceulen kan je een vierhoek veranderen in een driehoek met dezelfde oppervlakte. Figuur 2 is de tekening van Van Ceulen.



Figuur 2



Figuur 3

Naast de tekening van Van Ceulen staat een andere vierhoek (figuur 3). Volg de instructies hieronder op, dan maak je ook van deze vierhoek een driehoek met dezelfde oppervlakte.

- Teken de diagonaal BD.
- Maak de lijn AD aan de kant van D een stuk langer.
- Teken een lijn vanuit C die evenwijdig loopt aan BD.
- Noem het snijpunt van het verlengde van AD met deze nieuwe lijn E.
- Teken de lijn BE.

Nu komt de truc van Van Ceulen.

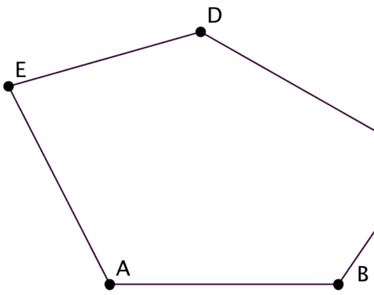
a Wat weet je van de lijnen BD en CE?

. . . .

b Wat kan je concluderen over de oppervlaktes van $\triangle DEB$ en $\triangle DCB$? (Bedenk welke zijde voor beide driehoeken als basis zou kunnen dienen en gebruik propositie 24.)

. . . .

c Kleur de driehoek die even groot is als vierhoek $ABCD$.



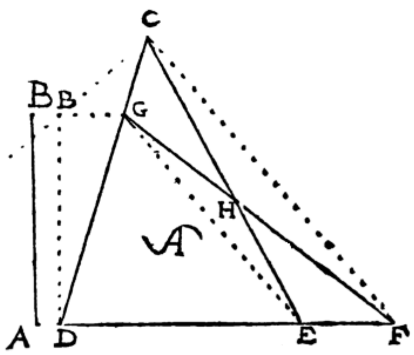
Figuur 4

Opdracht 3

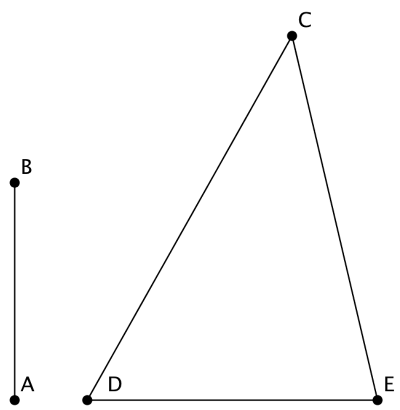
Zo kan je ook van een vijfhoek (figuur 4) een driehoek maken die even groot is. Dit kan op verschillende manieren. Haal bijvoorbeeld de eerste hoek eraf met behulp van diagonaal *BD*. Werk de tweede hoek weg met behulp van diagonaal *AD*.

Opdracht 4

Nu kan je deze oppervlakte-truc ook gebruiken met een ander doel. Je kan van $\triangle CDE$ in figuur 5 een driehoek maken die even hoog is als de lengte van *AB* maar wel even groot als $\triangle CDE$. Figuur 5 is het voorbeeld van Van Ceulen. De instructie die hij erbij schreef staat onder de figuren. Voer de opdracht zelf uit in figuur 6.



Figuur 5



Figuur 6

- Teken op *CD* een punt ter hoogte van *B* en noem dit *G*.

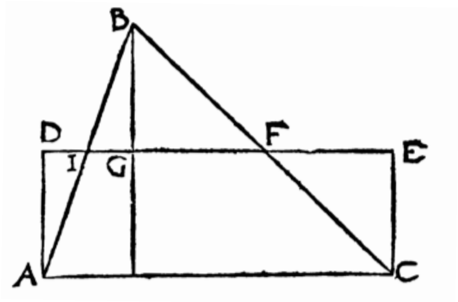
- Teken GE.
- Verleng DE aan de kant van E.
- Teken een lijn vanuit C evenwijdig aan GE; F is het snijpunt van deze lijn met het verlengde van DE.
- Teken nu FG.
- Vul in: $\triangle CEG = \triangle$ ....
- Kleur de driehoek die even groot is als $\triangle CDE$ en even hoog is als AB.

Je kan nu veelhoeken veranderen in driehoeken met dezelfde grootte. Van Ceulen beschreef ook hoe je van een driehoek een even grote rechthoek kan maken.

Propositie 28

Een viercant te maecken met rechte hoecken welcke een voorgegeven Tryangel ghelijck sy.
(*rechthoeckich viercant*: rechthoek — *quadraet*: vierkant!)

In figuur 7 van Van Ceulen kan je zien hoe dit werkt. Hij geeft de volgende uitleg.
Ga uit van $\triangle ABC$. Trek de hoogtelijn BH. (H ontbreekt in de tekening van Van Ceulen; schrijf H erbij!) Deel BH in twee gelijke delen in G. Maak nu een rechthoek met als lengte de basis van de driehoek (AC) en als breedte de helft van de hoogtelijn (HG).



Figuur 7

Opdracht 5

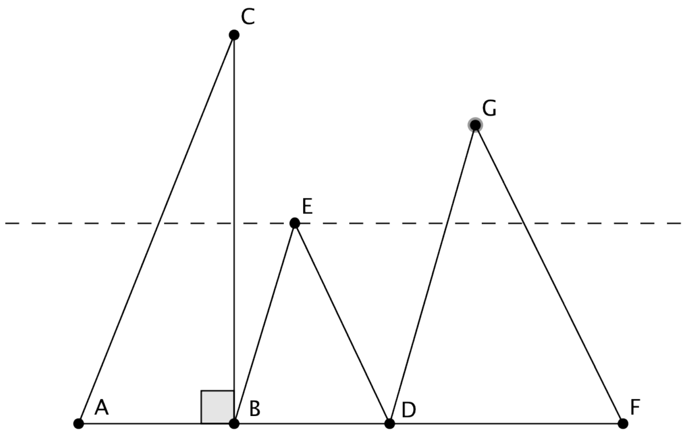
Leg uit dat rechthoek $ACED$ even groot is als driehoek ACB.

....

....

Opdracht 6

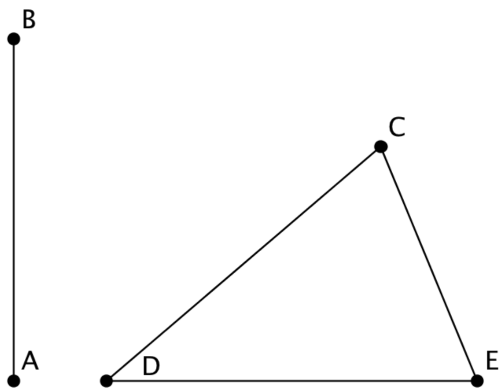
In deze opdracht ga je drie driehoeken samenvoegen tot één even grote rechthoek. Nu heb je proposities 24 en 28 nodig. Maak eerst alle driehoeken even hoog als de middelste. De bases van de driehoeken liggen tegen elkaar aan op dezelfde rechte lijn (AF). Maak een rechthoek die de oppervlakte heeft van alle driehoeken bij elkaar.



Figuur 8

Extra: Opdracht 7

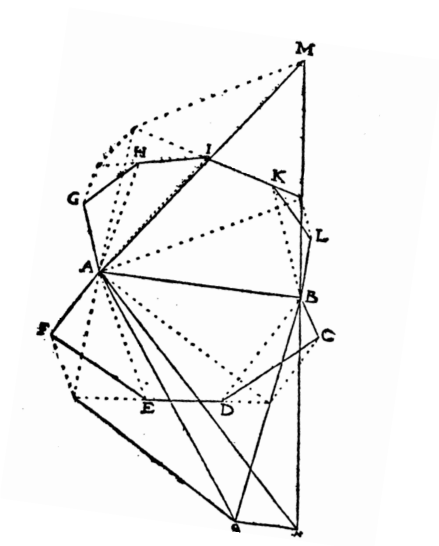
Nu moet je net als in opgave 4 een driehoek maken, even groot als $\triangle CDE$ en even hoog als de lengte van AB. In dit geval is de oorspronkelijke driehoek lager dan AB. Het principe blijft hetzelfde...



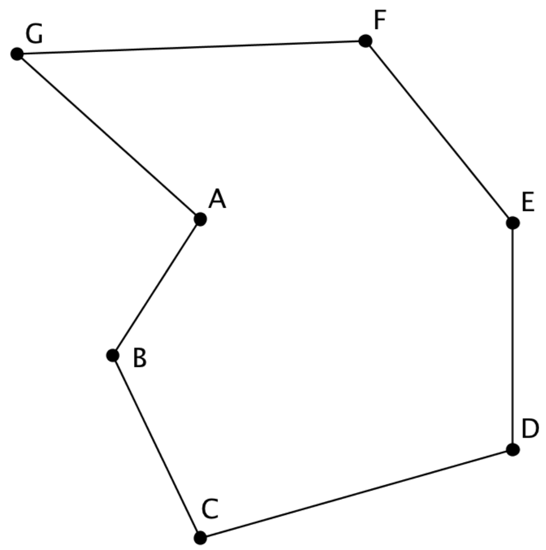
Figuur 9

Extra: Opdracht 8

Van Ceulen gaf ook het voorbeeld van een 11-hoek, waarbij hij een even grote driehoek construeerde. Zijn constructie zie je in figuur 10. Zoals je ziet koos hij één zijde als basis en begon hij van twee kanten.
Construeer bij de 7-hoek (figuur 11) een driehoek met dezelfde oppervlakte. Het helpt als je na één of twee stappen duidelijk de omtrek kleurt van de nieuwe veelhoek die je geconstrueerd hebt.



Figuur 10



Figuur 11