# Bewijzen
# onder leiding van Ludolph van Ceulen
# 1540 – 1610

Margot Rijnierse

## Inleiding

In de tijd van Ludolph van Ceulen hadden de meetkundige geleerden belangstelling voor de geschriften van de oude Grieken, zoals Euclides. Euclides had een systeem opgesteld van definities en proposities. Met behulp van bewezen proposities kon hij weer nieuwe proposities bewijzen, tot een heel systeem ontstond waar hij gebruik van kon maken. Ludolph van Ceulen (1540 - 1610) legde in het Nederlands uit wat er in de boeken van Euclides stond, want dat moest je weten als je meetkunde ging doen.
De volgende opgaven zijn bedoeld om je te laten kennismaken met bewijzen.
Je zal twee soorten proposities tegenkomen. De meeste proposities zijn stellingen, waarvan de waarheid moet worden bewezen. Bij de proposities 30 en 64 gaat het om een constructie, met de uitleg van de te volgen procedure en een bewijs dat de constructie het gewenste resultaat oplevert.
In opdracht 6 zie je hoe men rond 1600 vraagstukken aanpakte die wij tegenwoordig zouden oplossen met 'haakjes wegwerken'.
Maak bij elke opdracht een schets op je papier, zodat je daar zelf in kan tekenen.
Succes!

# OPDRACHT 1

# BIJ FIGUUR 1: PROPOSITIE 46

**Van Ceulen propositie 46** (stelling van Thales)
*De hoek aan de omtrek welke staat op de uiteinden van de diameter is recht.*
Hier: $\angle ADB$.

**Bewijs van propositie 46**
Maak een schets van de situatie in de rechterbovenhoek van het papier. In de tekening van Van Ceulen gaat het om $\triangle ADB$. We moeten bewijzen dat $\angle ADB$ een rechte hoek is.

- $\triangle ACD$ is gelijkbenig. Welke zijden zijn gelijk? Geef dit aan in de schets.

  ..........................................................................................

- Welke hoeken zijn dus gelijk?

  ..........................................................................................

  Noem deze hoeken $\alpha$ en geef ze aan in de schets.

- Welke hoeken zijn gelijk in $\triangle DCB$?

  ..........................................................................................

  Noem deze hoeken $\beta$ en geef ze aan in de schets.

- De som van de hoeken in $\triangle ADB$ is 180°. Vul in:

  ...... + ...... + ...... + ...... = 180°

- Hoe kan je hieruit de conclusie trekken dat $\angle ADB = 90°$ ?

  ..........................................................................................

- Bewijs geleverd! Wat heb je nu bewezen?

  ..........................................................................................

# OPDRACHT 2

# BIJ FIGUUR 2: PROPOSITIE 40

**Van Ceulen propositie 40**
*Twee punten op een cirkel vormen met het middelpunt een hoek die twee keer zo groot is als de hoek gevormd door die twee punten met een ander punt op de cirkel.*
Hier: $\angle BAC$ is twee keer zo groot als $\angle BDC$.
N.B. $\angle DAB$ lijkt hier rechthoekig, maar dat hoeft niet waar te zijn.

**Bewijs van propositie 40**
Van Ceulen trekt de hulplijn $DE$ door middelpunt $A$ en redeneert als volgt:

- $\triangle CAD$ is gelijkbenig, omdat

  ..........................................................................

- Noem $\angle CDA$: $\alpha$.
  Hoe groot is $\angle DAC$ (uitgedrukt in $\alpha$)? ..........................................

- Druk $\angle CAE$ uit in $\alpha$.

  ..........................................................................

- $\triangle BAD$ is gelijkbenig, omdat

  ..........................................................................

- Noem $\angle DBA$: $\beta$.
  Hoe groot is $\angle DAB$ (uitgedrukt in $\beta$)? ..........................................

- Druk $\angle BAE$ uit in $\beta$.

  ..........................................................................

Van Ceulen eindigt het bewijs met de volgende zin:
Als men van het geheel tweemaal zoveel afneemt als van zijn half, dan zal hetgeen men van het geheel overhoudt tweemaal zo groot zijn als hetgeen men van zijn half overhoudt.

- Neem $\angle BAE$ als ‘geheel’ en $\angle BDE$ als ‘half’. Pas bovenstaande uitspraak van Van Ceulen toe. Houd in de gaten wat je bewijzen moet.

  ..........................................................................

- Wat heb je nu bewezen? ..........................................................

# OPDRACHT 3

# BIJ FIGUUR 3: PROPOSITIE 30

**Van Ceulen propositie 30**
*Om een onregelmatige vijfhoek te veranderen in een rechthoek met dezelfde oppervlakte.*
Hier: opp $ABCDE$ = opp $GFHI$

Van Ceulen maakt eerst $\triangle GFC$ met een oppervlakte gelijk aan $ABCDE$ en vervolgens rechthoek $GFHI$ met een oppervlakte gelijk aan die van $\triangle GFC$. Van Ceulen geeft de volgende instructies:

- Teken de diagonalen $CE$ en $AC$ en maak $AE$ aan de beide kanten een stuk langer.
- Teken een lijn vanuit $D$ die evenwijdig loopt aan $CE$ en vanuit $B$ een lijn die evenwijdig loopt aan $AC$.
- Noem de snijpunten van deze nieuwe lijnen met het verlengde van $AE$: $G$ en $F$ .
- Teken de lijnstukken $CG$ en $CF$.
- Teken de hoogtelijn vanuit $C$ op $GF$.
- Teken rechthoek $GFHI$ met $IG = \frac{1}{2} \cdot CK$.

**Bewijs van propositie 30**
We moeten bewijzen dat bovenstaand stappenplan het gewenste resultaat geeft, dus dat opp $ABCDE$ = opp $GFHI$.

- Wat weet je van de lijnen $CE$ en $DG$?

  ..........................................................................

- Leg uit dat de oppervlaktes van $\triangle ECG$ en $\triangle ECD$ gelijk zijn. Maak gebruik van de wetenschap dat opp $\triangle = \frac{1}{2} \cdot$ basis $\cdot$ hoogte.

  ..........................................................................

- Kijk nu naar $AFBC$. Welke lijnen zijn evenwijdig en welke driehoeken hebben dezelfde oppervlakte?

  ..........................................................................

- Vul aan: opp $ABCDE$ = opp $\triangle$ ..............................................
- Leg uit dat opp $\triangle GFC$ = opp rechthoek $GFHI$.

  ..........................................................................

- Bewijs geleverd. Wat heb je nu bewezen? ......................................

# OPDRACHT 4

# BIJ FIGUUR 4: PROPOSITIE 84

**Van Ceulen propositie 84**
*In een scherphoekige driehoek $ABD$ is het kwadraat van de zijde tegenover een scherpe hoek even groot als de som van de kwadraten van de andere zijden min twee keer het stuk dat besloten is door een andere zijde, waarop uit een andere hoek een loodlijn getrokken werd en het deel van dezelfde zijde, van de loodlijn tot de scherpe hoek.*
Dit is een hele mond vol! Kijk in de figuur om te zien wat Van Ceulen bedoelt.
Kies als scherpe hoek $B$. Propositie 84: $AD^2 = AB^2 + BD^2 - 2 \cdot AB \cdot BC$

**Bewijs van propositie 84**
$CD$ is de hoogtelijn vanuit $D$ op $AB$, dus bij $C$ zijn er 2 rechte hoeken.
Er is steeds een regel open gelaten. Schrijf daar op hoe je van de ene regel naar de andere komt, bv. 'stelling van Pythagoras' of 'haakjes wegwerken'..

- $AB = AC + BC$

  ........................................

- $AB^2 = AC^2 + BC^2 + 2 \cdot AC \cdot BC$

  ........................................

- $AC^2 = AB^2 - BC^2 - 2 \cdot AC \cdot BC$

  ........................................

- $AC^2 + CD^2 = AB^2 - BC^2 - 2 \cdot AC \cdot BC + CD^2$

  ........................................

- $AD^2 = AB^2 - BC^2 - 2 \cdot AC \cdot BC + CD^2$

  ........................................

- $AD^2 = AB^2 + BD^2 - 2 \cdot BC^2 - 2 \cdot AC \cdot BC$

  ........................................

- $AD^2 = AB^2 + BD^2 - 2 \cdot BC(BC + AC)$

  ........................................

- $AD^2 = AB^2 + BD^2 - 2 \cdot BC \cdot AB$. Dat moesten we bewijzen!

# OPDRACHT 5

# BIJ FIGUUR 5: PROPOSITIE 64

**Van Ceulen propositie 64**
*Hoe men tussen twee bekende lijnen een middelproportionaal vinden zal. Dat is: zoals de eerste tot de gewenste staat, zo staat de gewenste tot de andere lijn.*

Middelproportionaal: $x$ is middelproportionaal van $a$ en $b$ als geldt: $a : x = x : b$
Bijvoorbeeld: 2 is middelproportionaal van 1 en 4 omdat $1 : 2 = 2 : 4$.
Van Ceulen gebruikt de volgende constructie:
Leg $AB$ en $BC$ gestrekt aan elkaar en teken een halve cirkel met $AC$ als diameter. Teken lijnstuk $BD$ door $B$, loodrecht op $AC$ en kies het eindpunt $D$ op de cirkel. $BD$ is nu de middelproportionaal.

**Bewijs van propositie 64** We moeten bewijzen dat de lijn $BD$ de middelproportionaal is van $AB$ en $BC$, dus we moeten bewijzen dat $BC : BD = BD : AB$
- Reken met de getallen uit de figuur na of geldt $BC : BD = BD : AB$.

  ..............................................................................

$\frac{BC}{BD} = \frac{BD}{AB}$ kunnen we herschrijven als $AB \cdot BC = BD^2$.
- $\angle CDA$ is een rechte hoek, omdat $AC$ de middellijn van de cirkel is en $D$ op de cirkel ligt. Je gebruikt hier propositie 46 uit opdracht 1.
- Schrijf de stelling van Pythagoras op voor $\triangle CDA$.

  ..............................................................................
- Vervang $AC^2$ door $(AB + BC)^2$ en werk de haakjes weg.

  ..............................................................................
- Vervang $CD^2$ met behulp van de stelling van Pythagoras in $\triangle CDB$.

  ..............................................................................
- Vervang $AD^2$ met behulp van de stelling van Pythagoras.

  ..............................................................................
- Vereenvoudig wat je overhoudt.

  ..............................................................................

Van Ceulen gebruikt deze propositie om een vierkant te construeren met een even groot oppervlakte als een gegeven rechthoek.

# OPDRACHT 6

# BIJ FIGUUR 6: PROPOSITIE 23

**Van Ceulen propositie 23** (stelling van Pythagoras)
*In alle rechthoekige driehoeken, zijn de vierkanten op de zijden, die de rechte hoek maken, samen zo groot als het vierkant op de lijn tegenover de rechte hoek.*

In de figuur bij de propositie heeft Van Ceulen wat voorbereidend werk verricht.
In $\triangle ABC$ is $\angle A$ de rechte hoek. Op elke zijde van de driehoek staat een vierkant.
$AG$ is de loodlijn vanuit $A$ op $FH$.

**Bewijs van propositie 23**
opp $\triangle CBL = \frac{1}{2} \cdot$ basis $\cdot$ hoogte $= \frac{1}{2} \cdot BL \cdot BA$
Dus: opp $\triangle CBL = \frac{1}{2} \cdot$ opp $BLKA$
opp $\triangle HBA = \frac{1}{2} \cdot HB \cdot HG = \frac{1}{2} \cdot$ opp $GHBI$

We vergelijken nu $\triangle HBA$ met $\triangle CBL$
$\angle HBA = \angle HBC + \angle CBA = \angle \quad \ldots\ldots + \angle \quad \ldots\ldots = \angle CBL$

| $\triangle HBA$ | | $\triangle CBL$ |
|---|---|---|
| $HB$ | = | $CB$ |
| $BA$ | = | $BL$ |
| $\angle HBA$ | = | $\angle CBL$ |

$\triangle HBA$ heeft dezelfde vorm en is even groot als $\triangle CLB$, want 2 zijden en de hoek ertussen zijn gelijk.

opp $GHBI = 2 \cdot$ opp $\triangle HBA = 2 \cdot$ opp $\triangle CLB =$ opp $BLKA$ (1)

Laat nu met behulp van $\triangle FAC$ en $\triangle BDC$ zien dat opp $CFGI$ = opp $CAED$. (2)

..............................................................................

..............................................................................

..............................................................................

opp $BLKA+$ opp $CAED =$ opp $GHBI + \ldots\ldots =$ opp $HBCE$ (1)(2)
Bewijs geleverd. Wat heb je nu bewezen?

..............................................................................

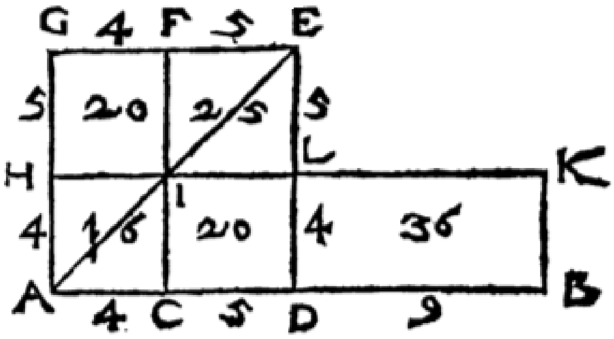
# OPDRACHT 7

# BIJ FIGUUR 7: PROPOSITIE 50

**Van Ceulen propositie 50**
*Als twee lijnen elkaar snijden in een cirkel, dan zijn de rechthoekige vierkanten van de delen aan elkaar gelijk.*
Hier: $AE \cdot BE = CE \cdot DE$

- Teken zelf twee willekeurige snijdende lijnen in een cirkel. Meet de stukken op en ga na of bovenstaande bewering klopt.

Voor het bewijs van deze propositie gebruikt Van Ceulen propositie 34:




**Van Ceulen propositie 34**
*Als een lijn in twee gelijke en in twee ongelijke delen gedeeld wordt, dan is de rechthoek van de ongelijke delen, met nog het kwadraat van het verschil tussen de halve lijn en het grootste deel, samen gelijk aan het kwadraat van de halve lijn.*
Hier gaat het om de lijn $AB$: gelijke delen: $AD$ en $BD$; ongelijke delen: $AC$ en $BC$.
Volgens propositie 34 geldt: $BD^2 (= AD^2) = AC \cdot BC + CD^2$

- Van Ceulen denkt in oppervlaktes. Welke oppervlaktes uit de figuur heb je nodig om te laten zien dat deze propositie klopt?

  ..................................................................................

- Neem $AC = a$ en $CD = b$. Schrijf op wat de propositie zegt, maar nu in $a$ en $b$:

$$\begin{array}{ccccccccc} BD^2 & = & AC & \cdot & BC & + & CD^2 \\ (a+b)^2 & = & \ldots\ldots & \cdot & \ldots\ldots & + & \ldots\ldots \end{array}$$

**Bewijs van propositie 50**
Kijk nu in de figuur die hoort bij propositie 50.
$F$ is in deze figuur het middelpunt van de cirkel.
$H$ is het midden van $CD$ en $G$ is het midden van $AB$.
$FH$ en $FG$ zijn hulplijnen. $FH$ staat loodrecht op $ED$ en $FG$ staat loodrecht op $AE$.

Deel $CD$ in twee gelijke delen: $CH$ en $DH$.
Deel $CD$ in twee ongelijke delen: $CE$ en $DE$.
Vul onderstaande regels aan:

- $DH^2 = CE\cdot \ldots\ldots \quad + \quad \ldots\ldots^2$ (1) (propositie 34)
- $DF^2 = \quad \ldots\ldots^2 \ + \ \ldots\ldots^2$ (stelling van Pythagoras)

Vervang in bovenstaande regel $DH^2$ door (1).

- $DF^2 = CE\cdot \ldots\ldots \quad + \quad \ldots\ldots^2 \quad + \quad \ldots\ldots^2$
- Dus: $DF^2 = CE\cdot \ldots\ldots \ + \ EF^2$ (2)

Bij deze laatste stap is gebruik gemaakt van ......
Doe hetzelfde met $AB$.

- $AG^2 = BE\cdot \ldots\ldots \quad + \quad \ldots\ldots^2$ (3)
- $AF^2 = \ldots\ldots^2 \quad + \quad \ldots\ldots^2$

Vervang $AG^2$ door (3).

- $AF^2 = BE\cdot \ldots\ldots \quad + \quad \ldots\ldots^2 \quad + \quad \ldots\ldots^2$
- Dus: $AF^2 = BE\cdot \ldots\ldots \quad + \quad \ldots\ldots^2$ (4)

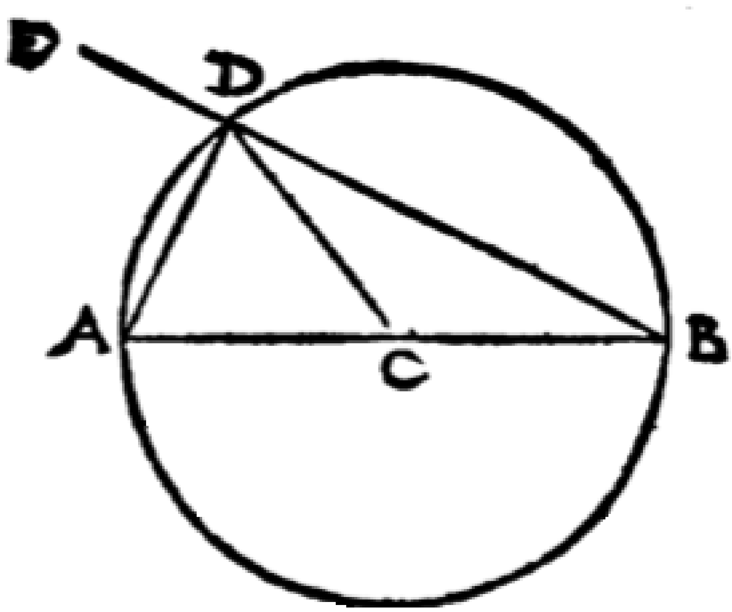
Nu geldt: $AF = DF$, omdat ............
Stel (4) gelijk aan (2)

- $BE\cdot \ldots\ldots \quad + \quad \ldots\ldots = CE\cdot \ldots\ldots \ + \ EF^2$

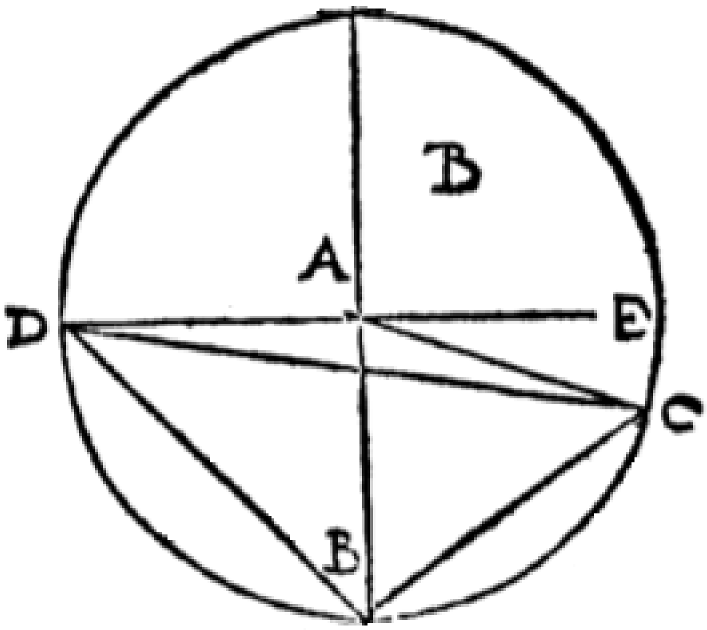
$EF^2$ wegstrepen geeft:

- $BE\cdot \ldots\ldots = CE\cdot \ldots\ldots$
- Bewijs geleverd. Wat heb je nu bewezen?

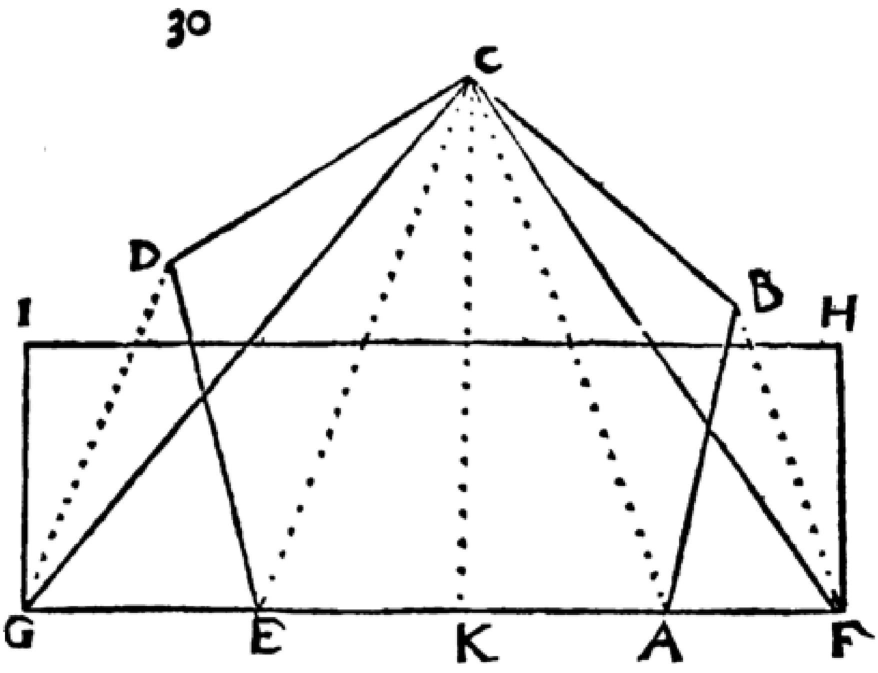
  ..........................................................................



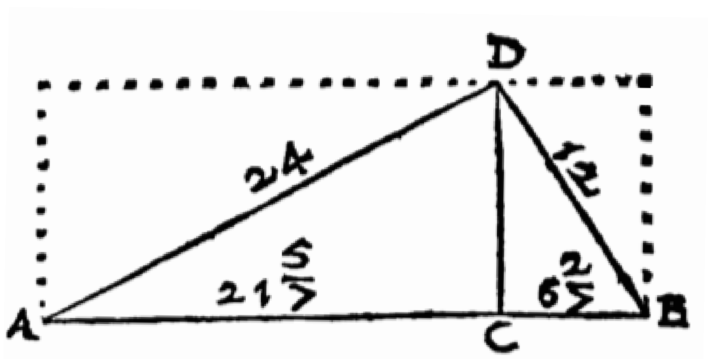

Figuur 1: propositie 46



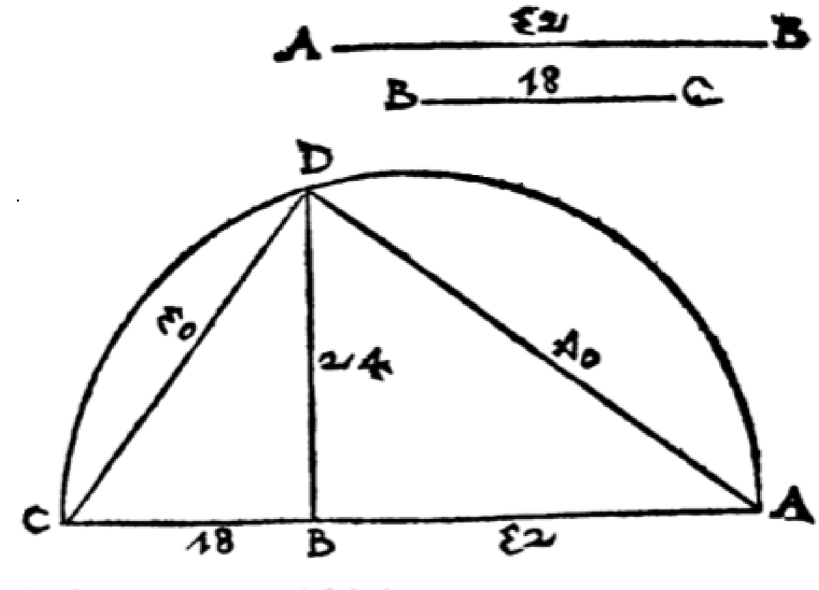

Figuur 2: propositie 40



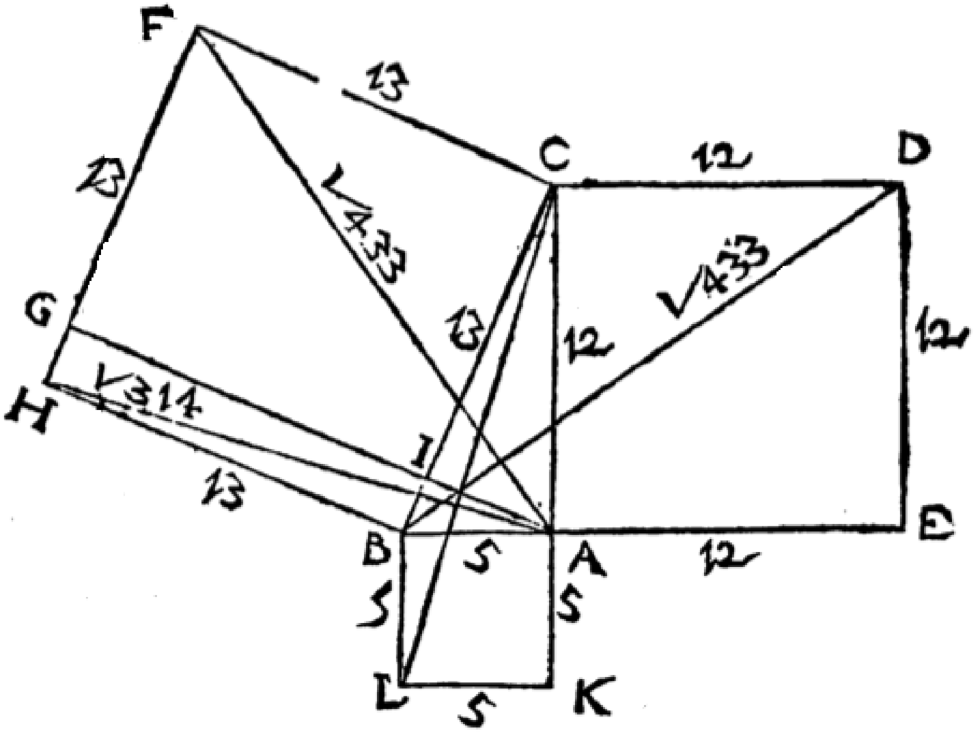

Figuur 3: propositie 30



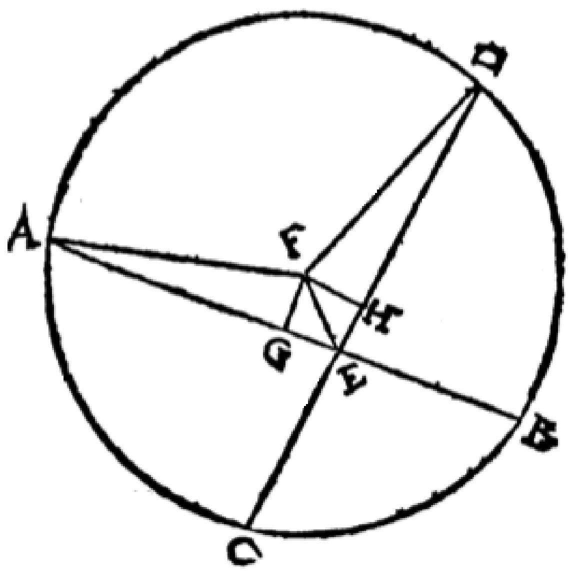

Figuur 4: propositie 84




Figuur 5: propositie 64




Figuur 6: propositie 23




Figuur 7: propositie 50