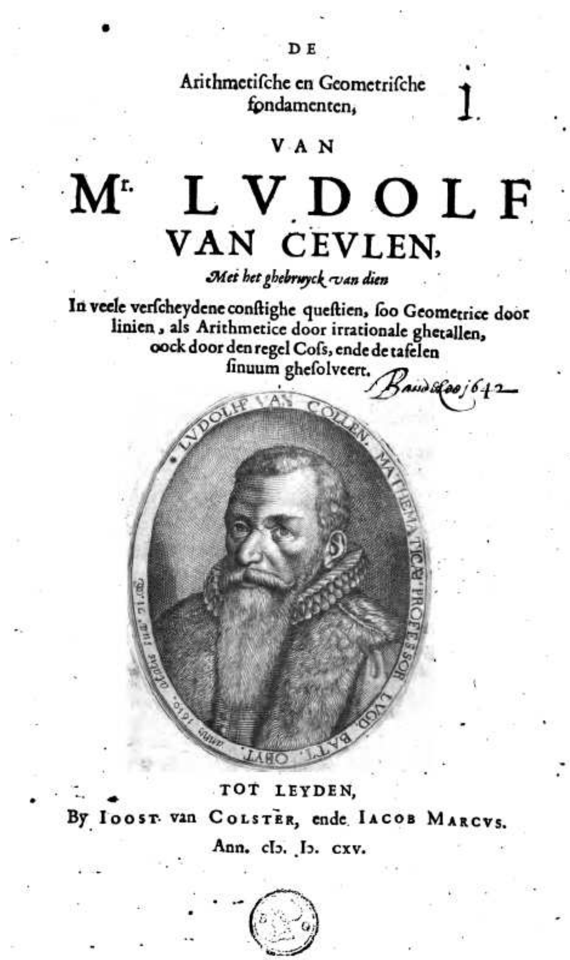
Ludolf van Ceulens
Arithmetische en Geometrische Fondamenten


DE

Arithmetiſche en Geometriſche fondamenten,

VAN

Mr. LVDOLF VAN CEVLEN,

Met het ghebruyck van dien

In veele verſcheydene conſtighe queſtien, ſoo Geometrice door linien, als Arithmetice door irrationale ghetallen, oock door den regel Coſs, ende de tafelen ſinuum gheſolveert.

TOT LEYDEN,

By IOOST van COLSTER, ende IACOB MARCVS.

Ann. cIↃ. IↃ. cxv.

Charlotte Vlek (s1404180)
1 augustus 2008
Betawetenschappelijk
onderzoek EC-master
Rijksuniversiteit Groningen

Uitgevoerd aan
Universiteit Utrecht
Onder begeleiding van
Steven Wepster

Voorwoord

Ludolf van Ceulen is bekend als de man die 35 decimalen van π berekende, en ze vervolgens op zijn grafsteen liet beitelen. Binnenkort is het 400 jaar geleden dat Van Ceulen stierf; een goede gelegenheid om meer over hem te weten te komen dan alleen dit ietwat vreemde wapenfeit.

Dit was een aanleiding voor mij om een van Van Ceulens werken onder de loep te nemen: de *Arithmetische en Geometrische Fondamenten*. Ik hoopte te weten te komen wat de bedoelingen van de auteur waren toen hij dit boek schreef. Hoewel zoiets moeilijk te achterhalen is uit alleen het werk zelf, had ik gelukkig de beschikking over bronnen die Van Ceulen zelf gebruikt had, en vertalingen van zijn werk. Mijn dank gaat uit naar de Universiteit Leiden, die interessante werken in haar verzameling had liggen.

Daarnaast heb ik tijdens het schrijven van deze scriptie een goede begeleiding genoten van Steven Wepster. Hij kon mij helpen met de details waar ik zelf niet gespecialiseerd genoeg voor was, en heeft mijn eerste versies van de tekst regelmatig voorzien van nuttig commentaar, van inhoudelijke verbeteringen of adviezen tot het corrigeren van typfoutjes. Ook heb ik van hem meerdere poststukken ontvangen met nuttige aanvullende literatuur.

Tenslotte heb ik bij het schrijven van deze scriptie veel plezier gehad van studiegenoten die op hetzelfde moment in dezelfde computerruimte met iets heel anders bezig waren. Het herlezen en corrigeren van de tekst is uiteindelijk mede mogelijk gemaakt door de NS, die mij vele uren in hun treinstellen hebben vervoerd.

Inhoudsopgave

Samenvatting

Ludolf van Ceulen (1540-1610) is bij velen alleen bekend vanwege zijn berekeningen aan de verhouding tussen de omtrek en de diameter van de cirkel (π). Daarnaast was hij echter ook docent aan de Leidse ingenieursschool, en schreef onder andere de *Arithmetische en Geometrische Fondamenten*.

In de *Fondamenten* behandelt Van Ceulen de basis van de reken- en meetkunde. De meetkundige theorie in het boek is direct te herleiden tot Van Ceulens bron: de Duitse vertaling van de *Elementen* van Euclides van de hand van Xylander (Wilhelm Holtzman). Vergelijking met deze bron verklaart enkele opvallende zaken en incorrectheden in Van Ceulens *Fondamenten*.

Volgens verschillende bronnen werd het boek gebruikt als lesmateriaal op de Leidse ingenieursschool. Wegens de posthume publicatie lijkt het echter onwaarschijnlijk dat Van Ceulen het speciaal voor de ingenieursschool schreef. In hetzelfde jaar dat de *Fondamenten* verscheen, bracht Willebrord Snellius een Latijnse vertaling ervan uit. Uit deze vertaling blijkt dat Snellius het zeker niet als leerboek interpreteerde: hij liet een groot deel van de uitleg over rekenkunde weg, en in een latere uitgave liet hij het theoretische deel over meetkunde helemaal weg, zodat er bijna alleen nog vraagstukken en voorbeelden overbleven.

Van Ceulens *Fondamenten* bevat naar verhouding erg veel vraagstukken en weinig theorie, en lijkt daarmee niet bedoeld als theoretisch leerboek. Het is echter ook meer dan een posthume uitgave van overgebleven manuscripten: tussen de verschillende delen van de *Fondamenten* bestaan steeds verwijzingen, zodat geen van de delen geheel los staat van de rest. Concluderend is de *Fondamenten* een boek dat de basis van de reken- en meetkunde behandelt in de vorm van vraagstukken, ondersteund door een korte theoretische inleiding.

Inleiding

In 16e- en 17e-eeuws Nederland ging de wiskunde voor een groot deel over meetkundige vraagstukken. Die vraagstukken waren soms ingegeven door praktische problemen, maar werden steeds op een theoretische manier opgelost (De Wreede 2007, p. 180). Tegelijkertijd ontstond steeds meer discussie over het type constructies en oplossingen dat men toestond in de meetkunde. Ook begon een aantal wiskundigen geleidelijk het gebruik van getallen in meetkundige problemen te introduceren, iets dat eerder in het geheel niet denkbaar was (De Wreede 2007, p. 181; Bos 2001, pp. 157-158; zie ook paragraaf 4.1).

Een van de Nederlandse wiskundigen die overduidelijk een grote hang naar getallen had, was Ludolf van Ceulen (1540-1610). In elk geval is dat hoe men hem tegenwoordig kent:

> „De geschiedenis heeft hem gereduceerd tot de man die het getal pi berekende tot op 35 decimalen nauwkeurig, en het liet beitelen in zijn grafsteen." (Bos 2000, p. 259)

De oorspronkelijke grafsteen in de Leidse Pieterskerk is verloren gegaan, maar Bierens de Haan vond het opschrift terug (Bierens de Haan 1878, p. 124, zie ook paragraaf 1.1). Sinds 5 juli 2000 is er in de Pieterskerk opnieuw een gedenkteken te bewonderen met daarop de 35 decimalen van π die Van Ceulen berekende (Oomes e.a. 2000, pp. 59-62).

Maar Van Ceulen deed meer dan dat: hij was een van de eerste docenten van de Leidse ingenieursschool, en publiceerde meerdere boeken (zie hoofdstuk 1). Zijn bekendste werk is *Vanden Circkel*, met daarin de eerste 20 decimalen van π en de bijbehorende berekeningen. Naast een aantal dunnere boeken publiceerde Van Ceulen ook de *Arithmetische en Geometrische Fondamenten*. Niemand heeft dit laatste werk nog uitgebreid bestudeerd. Sommige teksten beschrijven kort de inhoud ervan (Vorsterman van Oijen 1868, pp. 10-18; Bierens de Haan 1878, pp. 146-147), maar gaan er niet diep op in. Bierens de Haan zegt bijvoorbeeld over Van Ceulen: „Zijn verdiensten toch zijn slechts al te dikwerf miskend geworden" (Bierens de Haan 1878, p. 123), maar bespreekt alleen kort de inhoud van de *Fondamenten*.

Op het eerste gezicht lijkt de *Fondamenten* een leerboek, geïllustreerd aan de hand van veel voorbeelden. Dat is ook wat de titel doet vermoeden: de lezer leert hier over de basisprincipes van de reken- en meetkunde. Maar het aantal voorbeelden is groot, en het boek kan ook heel goed bedoeld zijn als bundeling van voorbeelden en vraagstukken, voor het gemak van de lezer voorzien van de benodigde theorie. Is de *Fondamenten* een leerboek of een bundeling van vraagstukken? Kortom, wat voor boek is de *Fondamenten* eigenlijk?

Deze vraag zal ik proberen te beantwoorden in deze scriptie. Daarvoor zal ik beginnen de achtergrond te bespreken (hoofdstuk 1): wat voor iemand was Van Ceulen, en wat is er bekend over de publicatie van de *Fondamenten*? De inhoud van de *Fondamenten* zal ik vervolgens uitvoerig bestuderen (hoofdstuk 2 en 3) en naast andere bronnen leggen (hoofdstuk 4) om de bedoelingen van de schrijver te achterhalen.

1 Van Ceulen en de *Fondamenten*

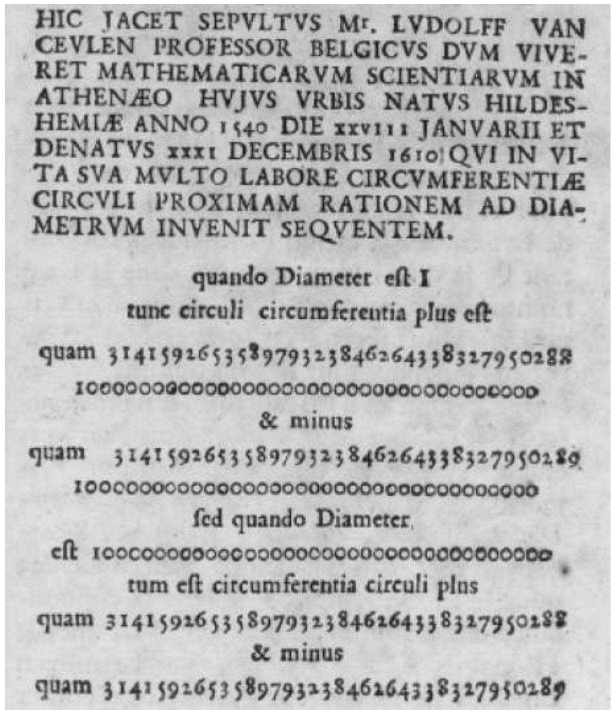
De achtergronden van de publicatie van de *Fondamenten* geven mogelijk inzicht in de keuzes van de auteur voor de inhoud van dit werk. In dit hoofdstuk zal ik daarom kort het leven van Van Ceulen bespreken (paragraaf 1.1) en zijn andere werken (par. 1.2). Ook zal ik de inhoud van de *Fondamenten* schetsen (par. 1.3) en de omstandigheden waaronder het boek gepubliceerd werd (par. 1.4).

1.1 Van Ceulen

Ludolf van Ceulen is oorspronkelijk afkomstig uit Hildesheim, Duitsland (Hogendijk 2006, p. 15). Hij en zijn vrouw Adriana Simons schreven zijn naam ook wel als Van Collen of Van Colen: men nam het destijds niet zo nauw met de spelling (Bierens de Haan 1878, p. 123).

Figuur 1: Ludolf van Ceulen (Van Ceulen 1615a, voorpagina)

Van Ceulen werd geboren in 1540, en stierf in 1610 (Hogendijk 2006, p. 15; Bos 2000, p. 260). Volgens Bierens de Haan (1878, p. 124) zag men Van Ceulens geboortejaar voorheen gewoonlijk als 1539. Vorsterman van Oijen



HIC JACET SEPVLTVS Mr. LVDOLFF VAN CEVLEN PROFESSOR BELGICVS DVM VIVERET MATHEMATICARVM SCIENTIARVM IN ATHENÆO HVJVS VRBIS NATVS HILDESHEMIÆ ANNO 1540 DIE xxviii JANVARII ET DENATVS xxxi DECEMBRIS 1610 QVI IN VITA SVA MVLTO LABORE CIRCVMFERENTIÆ CIRCVLI PROXIMAM RATIONEM AD DIAMETRVM INVENIT SEQVENTEM.

quando Diameter est I
tunc circuli circumferentia plus est
quam 314159265358979323846264338327950288 / 100000000000000000000000000000000000
& minus
quam 314159265358979323846264338327950289 / 100000000000000000000000000000000000
sed quando Diameter
est 100000000000000000000000000000000000
tum est circumferentia circuli plus
quam 314159265358979323846264338327950288
& minus
quam 314159265358979323846264338327950289

Figuur 2: Grafschrift van Van Ceulen (Oomes et al 2000, p. 58)

(1868, p. 4) en Kätscher (1979, p. 98) spreken inderdaad van dit jaartal, hoewel Kätscher het in zijn samenvatting weer over 1540 heeft. Volgens Bierens de Haan klopt die destijds heersende opvatting niet, en is het juiste jaartal 1540, waarbij hij zich beroept op de tekst van Van Ceulens grafsteen (zie figuur 2).

Vermoedelijk kwam Van Ceulen in 1578 vanuit Antwerpen naar Delft, en verhuisde hij in 1593 of 1594 naar Leiden (Hogendijk 2006, p. 15). Daar gaf Van Ceulen les in rekenen en schermen, dat laatste deed hij in zijn eigen schermschool in de Faliedenbegijnekerk in Leiden (Hogendijk 2006, p. 15; Bos 2000, p. 259). Van Ceulen kon in ieder geval Duits en Nederlands lezen, maar geen Latijn of Grieks (Hogendijk 2006, p. 15).

Toen prins Maurits in 1600 de Leidse ingenieursschool oprichtte, werden Symon Frans van der Merwen en Ludolf van Ceulen de eerste lectoren aan deze nieuwe school (Bierens de Haan 1878, p. 126). Van Ceulen bleef hier lesgeven tot zijn dood in 1610.

Deze ingenieursschool had als doel in het Nederlands te doceren, onder andere over wiskunde: „(...) in de Universiteyt alhier soude worden gedoceert in goeder duytsche taele. Die Telkonsten ende Landmeten principalyken tot bevorderinge van den geenen, die hen souden willen begeeven tottet Ingenieurschap (...)" (Notulen in Bierens de Haan 1878, pp. 126).

Enkele van de onderwerpen waarover aan de ingenieursschool werd gedoceerd, bespreekt Van Ceulen ook in de *Fondamenten*. Volgens Van Maanen (1987, p. 16) werden delen ervan gebruikt als lesmateriaal. Of Van Ceulen het boek hier ook speciaal voor heeft geschreven, is moeilijk te achterhalen (zie ook paragraaf 4.3).

Naast zijn werk op de ingenieursschool werd Van Ceulen bekend met zijn berekening van π tot op 35 decimalen nauwkeurig. Het getal π stond daarna in Duitsland ook wel bekend als het 'Ludolphische Zahl' (Hogendijk 2006, p. 16). De eerste 20 decimalen en de bijbehorende berekeningen publiceerde Van Ceulen in *Vanden Circkel* (1596, zie paragraaf 1.2).

1.2 Werken van Van Ceulen

Van Van Ceulens werken is *Vanden Circkel* (1596) veruit het bekendste boek. Voluit luidt de titel als volgt:

> *Vanden Circkel : Daer in gheleert werdt te vinden de naest Proportie des Circkels-diameter tegen synen Omloop / daer door alle Circkels recht (met alle Figueren / ofte Landen met cromme Linien besloten) ghemeten kunnen werden. Item aller Figuerensyden in den Circkel beschreven / Beginnende van den 3/4/5/15 hoeck / in Irrationale ghetallen te brengen / al hadde de Figuer veel hondert-duysent hoecken. Item des 7/11/13/17/19/23 Hoecx syden / ende wat syden ofte Coorden men begheert / welcker Boge groot zijn Graden / Minuten / Secunden / etc. Naer elcx behaghen. Noch de Tafelen sinuum, tangentium, ende secantium, met het gebruyck van dien, hoogh-noodigh voor de Land-meters: Met veel andere konstighe stucken, dierghelijcke noyt in druck uytgheghheven. Ten laetsten van Interest / met alderhande Tafelen daer toe dienende / met het ghebruyck / door veel constighe Exempelen gheleerdt / ende door 't gheheele werck bewesen / ende gheproeft.*

Deze lange titel beschrijft precies de inhoud van het boek (Oomes 2000, p. 13). Van Ceulen legt er onder andere uit hoe de verhouding tussen de omtrek en de middellijn van de cirkel, wat we tegenwoordig meestal π noemen, berekend kan worden aan de hand van in- en omgeschreven regelmatige veelhoeken in de cirkel. Hij laat zien hoe uit de lengte van een zijde van een ingeschreven n-hoek ook de lengte van de zijde van een ingeschreven $2n$-hoek te berekenen is. Uit de ingeschreven n-hoek is bovendien de zijde van een omgeschreven n-hoek te berekenen. Door n steeds te verdubbelen kan hij de omtrek van de cirkel steeds nauwkeuriger benaderen (Oomes 2000, p. 14).

Van Ceulen schreef verder een aantal kleinere werken: *Solutie en Werckinge* (1584), gericht aan Willem Goudaen. Hierin lost Van Ceulen 2 vraagstukken van Goudaen op. *Kort Claar Bewijs* (1585) is een reactie op *Quadrature du cercle* van een andere tijdgenoot van Van Ceulen: Simon van der Eycke. Hierin berekent Van Ceulen de omtrek van een regelmatige 192-hoek. Een jaar later publiceert Van Ceulen opnieuw een aanval op Van der Eycke: *Proefsteen ende Claerder wederleggingh* (1586). Tenslotte is de *Arithmetische en Geometrische Fondamenten* het enige andere grote werk dat Van Ceulen publiceerde (Bierens de Haan 1878, p. 130-139, zie paragraaf 1.3).

1.3 De Fondamenten

Van Van Ceulen zijn twee grotere werken bewaard gebleven: *Vanden Circkel* (zie paragraaf 1.2) en de *Fondamenten*. De volledige titel van die laatste luidt als volgt:

> *De Arithmetische en Geometrische fondamenten, van Mr. Ludolf van Ceulen, Met het ghebruyck van dien In veele verscheydene constighe questien, soo Geometrice door linien, als Arithmetice door irrationale ghetallen, oock door den regel Coss, ende de tafelen sinuum ghesolveert.*

Het boek is opgedeeld in zes delen. Het eerste deel behandelt de basis van de rekenkunde (de 'arithmetische fondamenten', zie paragraaf 2.1), het tweede deel de basis van de meetkunde (de 'geometrische fondamenten', zie paragraaf 2.2). Dit tweede deel baseerde Van Ceulen op een selectie van proposities uit Euclides' *Elementen*, zoals hij zelf aan het begin van dit deel zegt. Hiervoor gebruikte hij een vertaling van Xylander (Wilhelm Holtzman, zie paragraaf 2.3).

De overige delen bestaan uit vraagstukken en voorbeelden (zie hoofdstuk 3). Deel 6 springt eruit, doordat die bijna alleen maar over berekeningen aan in- en omgeschreven figuren in cirkels gaat, een onderwerp dan Van Ceulen ook in *Vanden Circkel* uitvoerig behandelt. Dit zesde deel is ook de enige plaats waar het rekenen met een onbekende (de 'regel coss') uit de ondertitel voorkomt.

In de voorbeelden in deel 3 tot en met 6 verwijst Van Ceulen regelmatig expliciet naar een propositie uit deel 2 (zie ook paragraaf 4.2). Van Ceulen is hier echter niet consequent in: op meerdere plaatsen verwijst hij naar de verkeerde propositie, en soms verwijst hij naar een propositie uit de *Elemen-*

ten, terwijl een propositie met dezelfde inhoud ook beschikbaar is in deel 2. Hier zal ik verder op in gaan in paragraaf 4.3.

Het lijkt erop dat de delen 1 en 2 in elk geval dienen als theoretische basis voor de rest van het boek. De *Fondamenten* lijkt hierdoor al gauw een leerboek: eerst presenteert Van Ceulen de theorie, en daarna een aantal oefenopgaven om de stof te leren. Maar misschien is de *Fondamenten* helemaal niet bedoeld om de lezer theorie te leren, maar een bundeling van de ingewikkelde vraagstukken die de auteur opgelost heeft. Die zouden dan voorzien zijn van de bijbehorende theorie in de delen 1 en 2. De bedoeling van het boek zal ik verder bespreken in paragraaf 4.3.

1.4 De publicatie van de *Fondamenten*

In 1615, vijf jaar na de dood van Van Ceulen, publiceerde zijn weduwe Adriana Simons een heruitgave van *Vanden Circkel*, volgens haar zelf 'geheel van fouten gezuiverd' (Bierens de Haan 1878, p. 145). In hetzelfde jaar publiceerde zij ook de *Fondamenten*.

Van Ceulens weduwe droeg de *Fondamenten* op aan prins Maurits, en voorzag het boek van een voorwoord, waarin ze het nut van wetenschap bespreekt. Volgens Bierens de Haan (1878, p.148) bestaan er twee uitgaven van de *Fondamenten*, uit hetzelfde jaar maar van verschillende uitgevers, en ook met verschillende voorwoorden. In een daarvan zegt Van Ceulens weduwe dat dit het boek is dat Van Ceulen in *Vanden Circkel* beloofde nog te publiceren:

> „Hebbe derhalve oock dese Arithmetische en Geometrische Fondamenten van Mr. Ludoff [sic] van Colen mijn man sal: ged: de welcke al over lange jaren van den Autheur selve (in sijn boeck gheschreven vanden Cirkel) zijn belooft geweest (...)" (Van Ceulen 1615a, voorwoord, in Bierens de Haan 1878, p. 144).

Zij doelt hiermee op de woorden van Van Ceulen in zijn voorwoord in *Vanden Circkel*:

> „(...) sal haest naer desen volghen een grooter werck/ daer inne onder andere ghehandelt sal werden van den alder-constighsten Regel Cos/ met veel constighe Exempels (...)" (Van Ceulen 1596, tweede voorrede p.2).

Het gebruik van de 'regel coss' komt in de *Fondamenten* echter alleen in deel 6 even voor. Daar verwijst Van Ceulen opnieuw naar een nog te publiceren 'Cos-bouck'. De belofte die Van Ceulen doet in *Vanden Circkel* slaat blijkbaar niet op de *Fondamenten*, maar op een ander werk. Dit manuscript heeft echter nooit bestaan, of is verloren gegaan (Vorsterman van Oijen 1868, p. 18; De Wreede 2007, p. 29).

In 1615 verscheen niet alleen een uitgave van de *Fondamenten*, maar ook een Latijnse vertaling ervan van de hand van Willebrord Snellius: *Fundamenta Arithmetica et Geometrica*. Snellius vertaalde Van Ceulens tekst, maar gaf er ook veelvuldig commentaar op (Bierens de Haan 1878, pp. 149-150, zie ook paragraaf 4.2). In 1619 publiceerde Snellius bovendien *De Circulo et adscriptis*, een bundeling van de Latijnse vertaling van *Vanden Circkel* en de vertaling van de *Fondamenten* met uitzondering van deel 2 (Bierens de Haan 1878, pp. 149-150). In paragraaf 4.2 zal ik dieper ingaan op Snellius' vertaling.

2 De theorie in de *Fondamenten*

De *Fondamenten* bestaat uit 6 delen, waarin Van Ceulen uiteenlopende onderwerpen behandelt, soms theoretisch en soms in de vorm van een vraagstuk. Om een idee te geven van de inhoud van de *Fondamenten* zal ik in dit hoofdstuk het theoretische gedeelte uit de *Fondamenten* bespreken. In het volgende hoofdstuk behandel ik de vraagstukken.

2.1 Rekenkunde

Het eerste deel van de *Fondamenten* behandelt de rekenkunde. Dit deel is onderverdeeld in acht hoofdstukken met uiteenlopende onderwerpen, die ik hieronder globaal zal behandelen, beginnend met het eerste hoofdstuk. In de eerste zin van dit hoofdstuk geeft Van Ceulen zijn visie op het nut van de rekenkunde. Een goede kennis van getallen is volgens hem onontbeerlijk voor iedereen die zich met meetkunde bezig houdt:

> „Geometria, is een const, daer door alle grootten, beweeghlick ofte onbeweeghlijck connen gemeeten werden, daer nae (ghemeten sijnde) wert door de ghetallen geopenbaert, daerom is van nooden voor een meter de kennisse van ghetallen." (Van Ceulen 1615a, p. 1)

Van Ceulen begint met beschrijven van de getallen als basis van de rekenkunde: „het beginsel van dien zijn tien teeckens" (Van Ceulen 1615a, p. 1). Hij begint bij de notatie van de getallen: 1 is een, 2 is twee maal 1, 3 is drie, 4 is vier, etc. En tenslotte: „0 is niet mael" (Van Ceulen 1615a, p. 1). Dan volgt de opbouw van grotere getallen met behulp van deze cijfers: als een getal alleen voorkomt, is het één maal dat getal. Een plaats verder naar links is het tien maal dat getal. Van Ceulen eindigt bij een uitleg van hoe een groot getal uitgesproken dient te worden. De uitspraak van 3754009604097592 neemt in totaal bijna vier regels in beslag.

Dit eerste hoofdstuk van het deel over rekenkunde behandelt verder de basisoperaties optellen, aftrekken, vermenigvuldigen en delen (Van Ceulen 1615a, pp. 2-6). De beschrijving van deze operaties concentreert zich vooral op de methodes om de uitkomst te berekenen, en minder op de verklaring van deze methodes. Van Ceulen legt precies uit waar elk cijfer moet staan bij het optellen van twee getallen, en geeft daarna een groot aantal voorbeelden. Een uitleg waarom dit inderdaad het juiste resultaat oplevert, geeft hij niet.

Ook bij de uitleg over vermenigvuldigen gaat het alleen om de methode, en niet om het waarom. Van Ceulen zegt hierover:

> „Dese specie als mede de volgende can niemant volcomen begrijpen ofte hy moet de volgende tafel van buyten connen daer in bevonden wert hoe veel dat 2 mael 2, 3 mael 3, 4 mael 5, etc. doet." (Van Ceulen 1615a, p. 4)

Van Ceulen hamert op het leren van de tafels van vermenigvuldiging voor het berekenen van grotere vermenigvuldigingen. Hij geeft daarbij ook een overzicht van de tafels van 1 tot en met 9, maar begint steeds pas bij $n \cdot n$, de tafel van 4 begint hij bijvoorbeeld pas bij $4 \cdot 4 = 16$. Inderdaad kunnen $1 \cdot 4$, $2 \cdot 4$ en $3 \cdot 4$ overgeslagen worden in de tafel van 4, omdat die producten reeds in de voorgaande tafels te vinden zijn. Van Ceulen geeft deze verklaring echter niet.

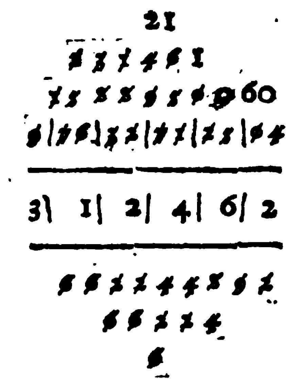
Na hoofdstuk I over de eenvoudige bewerkingen en getallen bespreekt Van Ceulen in de volgende hoofdstukken achtereenvolgens breuken (hoofdstuk II), proporties (hoofdstuk III), praktijkvoorbeelden (hoofdstukken IV en V), worteltrekken (hoofdstuk VI) en rekenen met sommen van wortels en natuurlijke getallen, en wortels van zulke sommen (hoofdstukken VII en VIII).

Wat breuken precies zijn, legt Van Ceulen in de eerste regel van hoofdstuk II uit: „De gebroocken ghetallen comen van gantsche getallen, want alsoo het gheheele in veel ghelijcke deelen ghedeelt wert, daer van geven dan ettelicke der selver deelen een gebroocken ghetal, (...)" (Van Ceulen 1615a, p. 7). Dit licht hij toe met een aantal voorbeelden waarbij hij een gedeelte van een gegeven gewicht berekent.

De 'waarde' van een breuk kan volgens Van Ceulen gevonden worden door de teller te vermenigvuldigen met het getal dat gebroken moet worden, en dan te delen door de noemer. Van Ceulens interpretatie van een breuk betrekt dus ook het getal dat gebroken moet worden erbij. Een breuk geeft dan aan hoe vaak (teller) een gedeelte (noemer) van een gegeven geheel genomen moet worden.

Na een inleiding over hoe men een breuk kan interpreteren, volgt een aantal voorbeelden en een uitleg over het rekenen met breuken. Nog meer rekenvoorbeelden belooft Van Ceulen na het volgende hoofdstuk, maar hij acht het nodig eerst proporties te bespreken „voor den beginner deser const" (Van Ceulen 1615a, p. 14). Een proportie definieert Van Ceulen als de verhouding tussen twee grootheden: „al het gheene men teghens malcander waerdeert, schattet of verghelijcket, het sy benoemt met maete of ghetal (...) wel verstaende dat de teghen malcander ghewaarde dinghen ghelijck van natueren of naemen zijn." (Van Ceulen 1615a, p. 14).

Proporties is een onderwerp dat ook Euclides bespreekt (Euclides 1956, pp. 112-186). Wellicht was dat voor Van Ceulen al voldoende om het onder-



Figuur 3: Worteltrekken bij Van Ceulen (Van Ceulen 1615a, p. 46)

werp ook te willen aansnijden. Bovendien komt het rekenen met proporties veelvuldig terug in de delen 3 t/m 6 van de *Fondamenten*, hoewel niet alle theorie die Van Ceulen hier bespreekt nodig is voor de rest van het boek.

Zo bespreekt Van Ceulen in relatie tot proporties de rekenkundige en meetkundige rijen. Hij laat bijvoorbeeld zien hoe hij de rekenkundige rij vindt door vanaf een begingetal steeds getallen te zoeken met dezelfde proportie tot de vorige in de rij (Van Ceulen 1615a, p. 16). Verder gaat Van Ceulen er niet erg diep op in, het komt dan ook in het geheel niet meer terug in de rest van de *Fondamenten*.

Het rekenen met proporties licht Van Ceulen toe met behulp van een voorbeeld. Gegeven het getal 8, vind dan een een getal zodat 8 met dit getal proportie 2:5 heeft. Het gezochte getal is 20. Vind nu nog een getal waarmee 20 de proportie 2:5 heeft, dit is 50. Het twee maal 'toepassen' van 2:5 op 8 geeft dus 50. De verhouding tussen deze twee is 4:25, wat precies gevonden kan worden door de corresponderende breuk $\frac{2}{5}$ met zichzelf te vermenigvuldigen: $\frac{2}{5} \cdot \frac{2}{5} = \frac{4}{25}$.

Dit twee maal 'toepassen' van een proportie noemt Van Ceulen hier 'optellen' van proporties. Deze bewerking is komt overeen met het vermenigvuldigen van de bijbehorende breuken, zodat het 'vermenigvuldigen' en 'delen' van proporties overeenkomt met respectievelijk machtsverheffen en worteltrekken. Dit laatste bespreekt Van Ceulen pas twee hoofdstukken verderop, waar hij op deze plek dan ook naar verwijst. Ook verwijst hij naar Euclides voor een grondiger uitleg over proporties: „by Euclides vindt ghy beter bericht" (Van Ceulen 1615a, p. 18).

Na twee uitgebreide hoofdstukken met veel rekenvoorbeelden legt Van Ceulen in hoofdstuk VI worteltrekken uit. Van Ceulen zet de in die tijd gebruikelijke methode voor worteltrekken uiteen (zie het kader op pagina 16 voor uitleg). Een van de voorbeelden waarmee Van Ceulen worteltrekken illustreert is de wortel uit 97632712504 (zie figuur 3). Bij het berekenen streept hij steeds de cijfers die niet meer nodig zijn door, zodat de procedure moeilijk af te leiden is uit het eindresultaat dat Van Ceulen hier laat zien.

Er lijkt een kleine fout te zitten in dit voorbeeld: de derde regel boven de bovenste horizontale streep is 231461 in plaats van 238461, en daarboven staat 21 in plaats van 121. Het was toen echter gebruikelijk om getallen niet dubbel te noteren, en inderdaad staat de ontbrekende 8 al eens in de derde rij van boven. Van Ceulen zal dus de reeds genoteerde 8 twee maal gebruikt hebben, en een lege plaats hebben opengelaten in de tweede rij van boven. Daar is vervolgens de 1 uit de bovenste rij terecht gekomen.

Na het bespreken van een aantal voorbeelden met worteltrekken, pikt Van Ceulen er een bijzonder voorbeeld uit: het voorbeeld 622521, waarbij op het laatst geen rest overblijft. Het is dus precies het kwadraat van een geheel getal, en Van Ceulen noemt dit getal „gheschickt" en verderop „rationael" (Van Ceulen 1615a, p. 46). De getallen die niet aan deze eigenschap voldoen zijn „ongheschickt" of „irrationael" (Van Ceulen 1615a, p. 46).

Enigszins verwarrend is dat we de woorden rationaal en irrationaal tegenwoordig voor andere doeleinden gebruiken. Van Ceulen gebruikt ze om aan te geven of een getal het kwadraat is van een geheel getal. Nu gebruiken we ze om aan te duiden of een getal als breuk geschreven kan worden.

Ook het rekenen met „ongheschickte" getallen komt aan bod. Voor het optellen geeft Van Ceulen bijvoorbeeld de regel die er in moderne notatie als volgt uit zou zien: $\sqrt{x}+\sqrt{y}=\sqrt{x+y+\sqrt{4xy}}$. Een uitleg waarom dit werkt geeft hij niet. Dat de regel geldt, is echter vrij eenvoudig te zien:

$$(\sqrt{x}+\sqrt{y})^2 = x + 2\sqrt{x}\sqrt{y} + y = x + y + \sqrt{4xy}$$

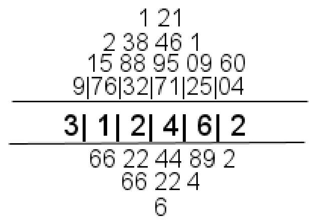
dus (omdat $\sqrt{x} > 0$ en $\sqrt{y} > 0$)

$$(\sqrt{x}+\sqrt{y}) = \sqrt{x+y+\sqrt{4xy}}.$$

Interessant is een truc die van Ceulen geeft om wortels van zogenaamde communicanten op te tellen. Communicanten definieert hij als twee wortels waarvan de verhouding rationaal is. Bijvoorbeeld $\sqrt{12}$ en $\sqrt{27}$: de verhouding van deze twee kan door deling van beide getallen onder de wortel door 3 vereenvoudigd worden tot $\sqrt{4} : \sqrt{9}$ en dus 2:3. Het optellen van $\sqrt{12}$ en $\sqrt{27}$ is dan simpel: neem de twee getallen in de rationale verhouding (2 en 3), en neem het kwadraat van hun som: $(2+3)^2 = 5^2 = 25$. Vermenigvuldig dit

Worteltrekken

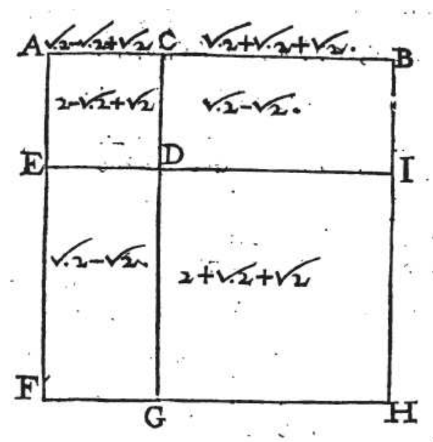
Gegeven het getal 97.632.712.504. Schrijf dit op met verticale streepjes na elke twee cijfers, beginnend aan de rechterkant, en trek er een horizontale streep onder (zie figuur). Begin met de getallen links van het eerste verticale streepje: de 9. Zoek het grootste kwadraat dat hier nog in past: 3. Dit is het eerste cijfer van de gezochte wortel. Schrijf de 3 op, en trek hieronder nog een horizontale streep. Het verschil tussen 9 en het kwadraat van 3 is 0, dus boven de 9 wordt in dit geval geen getal genoteerd. Noteer twee maal het gevonden cijfer (3) onder de onderste horizontale streep: 6.



Combineer vervolgens deze rest (hier 0) en de volgende twee cijfers. Dit nieuwe getal is hier 76, maar als de rest van het vorige voorbeeld 1 was, had hier 176 gestaan. Het volgende cijfer van de wortel wordt nu gevonden met behulp van de genoteerde 6 onder de onderste horizontale streep, en door dan het grootste cijfer x te vinden zodat $[6x] \cdot x \leq 76$. Hierbij moet $[6x]$ niet als vermenigvuldiging gelezen worden, maar als twee cijfers achter elkaar die één getal vormen. In dit geval voldoet $61 \cdot 1 = 61$. Het volgende cijfer is dus 1. Noteer twee keer de tot nu toe gevonden cijfers ($2 \cdot 31 = 62$) onder de onderste horizontale streep, achter de 6 die daar reeds stond.

Trek het kwadraat van het tot nu toe gevonden getal (31) af van het tot nu toe gebruikte deel van het getal waaruit de wortel gevonden moet worden (976). Dit levert een rest van $976 - 31^2 = 15$, noteer dit bovenaan. De combinatie van dit getal (15) en de volgende twee cijfers (32) vormt een nieuw getal (1532). Nu moet een x gevonden worden zodat $[62x] \cdot x \leq 1562$ en x zo groot mogelijk. Het antwoord is 2, en dit vormt zo het volgende cijfer van de wortel. Noteer weer twee maal het tot nu toe gevonden getal (312) onder de horizontale streep ($2 \cdot 312 = 624$) en bereken het verschil van de tot nu toe gebruikte cijfers (97632) en het kwadraat van het tot nu toe gevonden getal (312): $97632 - 312^2 = 288$, en noteer dit bovenaan.

Zo gaat de berekening verder: het volgende cijfer is 4 omdat $6244 \cdot 4 \leq 28871$, noteer onderaan $2 \cdot 3124 = 6248$, en bovenaan $9763271 - 3124^2 = 3895$. Het cijfer daarna is 6 omdat $62486 \cdot 6 \leq 389525$. Noteer onder $2 \cdot 31246 = 62492$, en boven $976327125 - 31246^2 = 14609$. Het laatste cijfer is tenslotte 2, omdat $624922 \cdot 2 \leq 1460904$. Voeg bovenaan nog het verschil toe: $97632712504 - 312462^2 = 211060$.



Figuur 4: Bewijs optelling universale getallen (Van Ceulen 1615a, p. 61)

weer met het getal waar oorspronkelijk door gedeeld was, in dit geval 3, en trek de wortel: $\sqrt{3 \cdot 25} = \sqrt{75}$.

Ook delen en vermenigvuldigen met wortels bespreekt Van Ceulen hier, en in het volgende hoofdstuk gaat hij over op het rekenen met 'binomische en risidusche getallen'. Waar het hier om gaat, zijn sommen van gehele getallen en wortels, die niet verder vereenvoudigd kunnen worden. Zo is bijvoorbeeld $2 + \sqrt{11}$ (opgeteld) een binomium, en $2 - \sqrt{11}$ (afgetrokken) een risiduum.

Een stap verder gaan de universale getallen (hoofdstuk VIII), waarbij verschillende wortels genest zijn. Een voorbeeld is de wortel van zo'n binomium: $\sqrt{2 + \sqrt{11}}$. Van Ceulen legt uit hoe hij met zulke getallen rekent, en bewijst ook waarom de optelling werkt: voor het optellen van twee getallen van de vorm $\sqrt{a + \sqrt{b}}$ en $\sqrt{c + \sqrt{d}}$ telt hij de kwadraten op, plus twee maal de wortels vermenigvuldigd met elkaar. Vervolgens trekt hij de wortel uit deze som:

$$\sqrt{a + \sqrt{b}} + \sqrt{c + \sqrt{d}} = \sqrt{(a + \sqrt{b}) + (c + \sqrt{d}) + \sqrt{4(a + \sqrt{b})(c + \sqrt{d})}},$$

$$= \sqrt{(a + \sqrt{b}) + (c + \sqrt{d}) + 2\sqrt{(a + \sqrt{b})(c + \sqrt{d})}}.$$

Van Ceulen bewijst de juistheid van deze formule met behulp van een voorbeeld (zie figuur 4). Zijn redenatie is echter in het algemeen geldig. Het optellen van de twee universale getallen ziet hij als het achter elkaar plaatsen van de beide bijbehorende lijnstukken, met als resultaat de zijde $AC + CB = AB$. Om de lengte van deze zijde te bepalen,trekt hij de wortel uit de oppervlakte van het vierkant met zijden $AF = AB$. De figuur laat zien dat dit oppervlak precies bepaald wordt door het kwadraat van de eerste wortel (vierkant $AEDC$) en het kwadraat van de tweede wortel (vierkant $DGHI$) en twee maal de twee wortels met elkaar vermenigvuldigd (rechthoeken $EFGD$ en $CDIB$) bij elkaar opgeteld. Dit is precies wat de bovenstaande regel doet.

Samengevat bespreekt Van Ceulen in de *Fondamenten* de basisoperaties op getallen, waarbij hij ook onderwerpen als breuken, wortels en geneste wortels aansnijdt. Het deel gaat vergezeld van een groot aantal voorbeelden, bij sommige onderwerpen meer dan bij andere. Rekenen met breuken lijkt bijvoorbeeld een moeilijk onderwerp te zijn geweest in die tijd: na de theorie hierover volgen 16 pagina's vol rekenvoorbeelden (Van Ceulen 1615a, p. 21-36) en verderop nog eens 8 (Van Ceulen 1615a, p. 37-44).

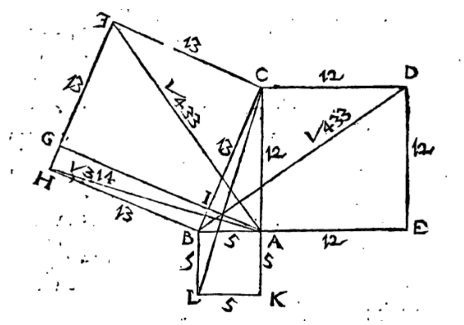
Van Ceulens belangrijkste doel van dit deel lijkt te zijn dat hij zijn lezers een vaardigheid in rekenen wil aanleren, gezien het grote aantal voorbeelden. Tussendoor geeft hij regelmatig handige rekentrucs. Voor het optellen van breuken kan je volgens hem de noemers vermenigvuldigen om ze gelijk te maken, maar is het efficiënter om de kleinste gemene veelvoud te zoeken. En bij het rekenen met wortels geeft Van Ceulen een aparte regel voor het optellen van communicanten. Hier toont zich de ware rekenmeester: Van Ceulen put zich uit met veel voorbeelden en handige manieren om tot de uitkomst te komen.

2.2 Meetkunde

In deel 2 van de *Fondamenten* behandelt Van Ceulen de basisprincipes van de meetkunde. Hij doet dit in de vorm van 33 definities, 12 'ghemeene bekentenissen' en 84 proposities. In de definities legt Van Ceulen vast wat hij bedoelt met een punt, een driehoek, een gelijkbenige driehoek en dergelijke termen.

De 'ghemeene bekentenissen' zijn algemene inzichten, zoals bijvoorbeeld de volgende: „Dinghen die d'een d'ander gelijck zijn, zijn mede onder malcander ghelijck" (Van Ceulen 1615a, p. 72). In de proposities behandelt Van Ceulen bijvoorbeeld verschillende constructietechnieken, zoals hoe een bissectrice (prop. 5) of een loodlijn (prop. 8) geconstrueerd kan worden. Van Ceulen bewijst van zulke constructies niet dat ze inderdaad het gewenste resultaat opleveren, maar laat slechts zien hoe ze toegepast kunnen worden. Van enkele andere proposities geeft Van Ceulen wel een bewijs, zoals bijvoorbeeld de stelling van Pythagoras:

> Prop. 23: „In alle recht-hoeckighe Tryangels, zijnde quadraten der sijden, welcke den rechten hoeck maecken, tsamen soo groot



Figuur 5: Illustratie bij de stelling van Pythagoras (Van Ceulen 1615a, p. 80)

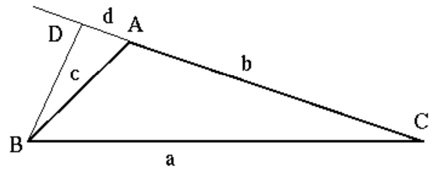
> als het quadraet der linie over den rechten hoeck.” (Van Ceulen 1615a, pp. 80)

Van Ceulen geeft hier het bewijs zoals Euclides dit leverde. In moderne bewoordingen luidt zijn bewijs als volgt: Gegeven de driehoek ABC (zie figuur 5), teken vierkanten op de drie zijden, en trek de lijnen zoals in de figuur. Trek bovendien de hulplijn LC. Dan is driehoek BLC gelijk aan driehoek BAH. Immers, twee van de drie zijden zijn gelijk: $BC = BH$ en $AB = LB$ wegens de constructie van de vierkanten. Bovendien geldt $HBA = CBL$, omdat beide een rechte hoek optellen bij CBA. Omdat deze driehoeken twee gelijke zijden en een gelijke hoek ingesloten door die zijden hebben, zijn ze gelijk (vanwege propositie 2 in deel 2 van de *Fondamenten*, die precies dit zegt).

Driehoek BLC is bovendien half zo groot als vierkant $ABLK$, omdat ze op gelijke bases en tussen dezelfde parallellen staan. Dit volgt uit propositie 24 op de volgende pagina van de *Fondamenten*. Analoog volgt dat ABH half zo groot is als $HBIG$. Dat betekent dat de vierhoeken $ABLK$ en $HBIG$ aan elkaar gelijk zijn. Via eenzelfde soort redenatie volgt dat het vierkant $ACDE$ op zijde AC gelijk is aan rechthoek $GICF$. De vierkanten op de zijden AC en AB zijn dus samen precies gelijk aan het vierkant op zijde BC, waarmee de stelling bewezen is.

Verderop in deel 2 staan de twee varianten van de stelling van Pythagoras voor stomphoekige (prop. 83) en scherphoekige (prop. 84) driehoeken:

> Prop. 83: „In alle wijthoeckighe Tryangelen is het quadraat der zijde, over den wijden hoeck, grooter als beyde quadraten der zijden, welcke den wijden hoeck maken, om tweemael het viercant, welcke besloten werdt, van de eene zijde, op welcke als die verlenghert werdt, dat een perpendiculaer valt van de langste linie,



Figuur 6: Cosinusregel

> ende vant stuck, soo veel de zijde ghelengert werdt" (Van Ceulen 1615a, p. 112)
>
> Prop. 84: „Inden scherphoeckighen Tryangel, ist quadraet der zijde, welcke den scherpen houck ondertrocken is, kleender als beyde andere quadraten der zijden, als den scherpen-houck maken, om tweemael het stuck, welcke besloten is van eender zijden, op welcke uyt den anderen houck een perpendiculaer ghetrocken wert, ende het deel der selve, vanden perpendiculaer tot aenden scherpenhouck" (Van Ceulen 1615a, p. 113)

Dit zijn, net als de stelling van Pythagoras, bijzondere gevallen van wat we tegenwoordig de cosinusregel noemen: $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos(\angle BAC)$ (zie figuur 6). Immers, propositie 83 zegt $a^2 = b^2 + c^2 + 2bd$. Er geldt $\cos(\angle BAC) = -\cos(\angle BAD) = -\frac{d}{c}$, dus $d = -c \cdot \cos(\angle BAC)$. Invullen geeft $a^2 = b^2 + c^2 + 2bc\cos(\angle BAC)$, precies de cosinusregel. Voor propositie 84 volgt de gelijkheid op eenzelfde manier.

De overige proposities zijn in te delen in een aantal basisonderwerpen. Van Ceulen begint met enkele constructietechnieken en eigenschappen van hoeken in driehoeken en tussen snijdende lijnen (prop. 1-12). Dan volgt een aantal proposities over hoeken en parallelle lijnen, parallellogrammen en driehoeken (prop. 13-22). De stelling van Pythagoras staat hier tussen, en die wordt gevolgd door eigenschappen van driehoeken en parallellogrammen tussen parallelle lijnen (prop. 24-27). Vervolgens bespreekt Van Ceulen achtereenvolgens eigenschappen van rechthoeken (prop. 28-38), cirkels (prop. 39-52) en in- en omgeschreven figuren (prop. 53-60). Tenslotte is het de beurt aan verhoudingen en proporties (prop. 61-72), gelijkvormigheid en oppervlaktes (prop. 73-82) en de twee varianten van de stelling van Pythagoras voor scherphoekige en stomphoekige driehoeken (prop. 83-84).

2.3 Van Ceulens deel 2 en Euclides' *Elementen*

Voor deel 2 van de *Fondamenten* baseert Van Ceulen zich op Euclides' *Elementen*, zo zegt hij zelf: „(...) de fondamenten van Geometrie opt eenvoudichste beschreven zijn, uyt Euclides getrocken." (Van Ceulen 1615a, p. 69).

Inderdaad corresponderen alle definities, 'ghemeene bekentenissen' en proposities met één uit de *Elementen* van Euclides. Voor zover Van Ceulen hiervan afwijkt, gaat het om een propositie die uit een voorgaande volgt, of een generalisatie van een propositie uit de *Elementen*. Zie appendix B voor een lijst van corresponderende definities en proposities bij Van Ceulen en Euclides.

In *Vanden Circkel* (1596), zijn andere grote werk, zegt Van Ceulen de Duitse vertaling van de *Elementen* van Euclides van de hand van Xylander gelezen te hebben (Van Ceulen 1596, p. f^0 2 r^0). Wilhelm Holtzman (1532-1576), ook bekend als Guglielmus Xylander, studeerde onder andere wiskunde in Tübingen (Duitsland), en werd later benoemd als hoogleraar Grieks aan de universiteit van Heidelberg. In 1562 verscheen een vertaling van de *Elementen* van Euclides van zijn hand (Reich 2003, p. 85). Deze vertaling wijkt enigszins af van (de moderne uitgave van) de originele *Elementen*, bijvoorbeeld doordat Holtzman op een aantal plaatsen een korte toelichting geeft. Op de afwijkende punten blijkt Van Ceulen de vertaling van Holtzman te volgen, zoals bijvoorbeeld in de indeling van de definities in het begin van boek 1. In de *Elementen* zijn er 23 definities (Euclides 1956, deel 1 pp. 153-154), waarin de basisbegrippen zoals een punt, een lijn en verschillende figuren worden vastgelegd. Holtzman heeft dit aantal van 23 uit elkaar getrokken tot 34 definities (Holtzman 1562, pp. 1-4), en Van Ceulen heeft er 33 (Van Ceulen 1615a, pp. 69-71). Van Ceulen laat precies één weg van Holtzmans vertaling, maar volgt diens indeling verder nauwkeurig. Dit bevestigt het vermoeden dat Holtzmans vertaling van de *Elementen* de directe bron voor deel 2 uit de *Fondamenten* vormde.

Ook de inhoud van de definities bij Van Ceulen en Holtzman toont veel gelijkenis. Holtzman geeft bij veel van de definities een uitleg van hoe die begrepen moet worden. In kleinere letters geeft hij commentaar op de definitie, die in de meeste gevallen exact hetzelfde bij Euclides terug te vinden is. Van Ceulen heeft blijkbaar geprobeerd de definitie en het commentaar samen zo kort mogelijk te formuleren, waardoor er substantiële afwijkingen ontstaan van de originele Euclides.

Vergelijk bijvoorbeeld de drie verschijningsvormen van de eerste definitie: die van een punt. Van Ceulen noteert die als volgt: „Punt is, welcke ondeelbaer, ende een begin van alle grooten is, wert alleen met het verstant gemerct"(Van Ceulen 1615a, p. 69). In Euclides is de definitie korter: „een punt, is datgene dat geen deel heeft" (Euclides 1956, deel 1 p. 153). De vertaling van Holtzman verklaart deels hoe Van Ceulen op zijn aangepaste definitie is gekomen, en laat ook zien dat die hiermee wellicht wat haastig te werk is gegaan: „Een punt wordt genoemd, wat geen deel heeft"[1]. Holtzmans uitleg hierbij luidt als volgt:

> „Het punt is een begin van alle grootten of aantallen, maar zelf is het geen grootte. Daarom mag het ook niet gedeeld worden. Zodoende is 1 (zoals dat bij Euclides is) geen getal, en 1 vermenigvuldigt en deelt dan ook niet, maar het is de oorsprong van alle getallen."[2]

Van Ceulen heeft blijkbaar geprobeerd Holtzman te volgen, inclusief diens uitleg van en commentaar op de definities, maar wilde het tegelijk zo kort mogelijk houden. Het resultaat van deze aanpak is dat hij de definitie van een punt minder nauwkeurig stelt. Een soortgelijk voorbeeld is de cirkel. Holtzman definieert die net als Euclides in 2 aparte delen:

> Def. 14: „Een cirkel, is een vlak figuur met een lijn begrensd (welke lijn omtrek of circonferentie wordt genoemd), waar in het midden een punt staat: en welke rechte lijnen ook van dat punt naar de omtrek getrokken worden, ze zijn allemaal even lang."[3]
>
> Def. 15: „Dat punt heet het centrum, dat is midden, van de cirkel."[4]

Deze komen inhoudelijk overeen met de corresponderende definities bij Euclides. Van Ceulen verdeelt de inhoud echter iets anders, zo dat de eerste definitie op zichzelf staand eigenlijk onjuist is:

> Def. 14: „Een circkel, is een vlacke Figuer met een linie begrepen, welcke omloop ofte circonfrentie ghenaemt wert: heeft int midden een punt." (Van Ceulen 1615a, p. 70)

[1] „Ain punct oder tipfflin/wirt das genant/so khain thaill hatt." (Holtzman 1562, p. 1)

[2] „Der punkt ist ein anfang aller grossen oder quantitet/je doch erselbst ist khain grosse. Darum mag er auch nit gethailt werden. Also ist 1. (wie im bij Euclides volgt) khain zall/dan 1. multipliciert/und dividiert nit/ aber ist ein ursprung aller zalen."(Holzman 1562, p. 1)

[3] „Ain zirckel/ ist ein ebne figur mit einer lini begriffen (welche lini der Umbkhrais oder circumferenti genent wirdt) in welcher mitten ein Punckt steht: und sovil gestracter linien von de selben an der umbkrais gezogen werden/die sind alle gleichlang."(Holtzman 1562, p. 2)

[4] „Der selbig punct haist des zirckels Centrum/das ist/Mitte." (Holtzman 1562, p. 2)

> Def. 15: „Ghenaemt centrum, waer uyt alle linien tot aen de circonfrentie ghetrocken malcander ghelijck zijn." (Van Ceulen 1615a, p. 70)

Blijkbaar heeft Van Ceulen geprobeerd de twee termen 'circkel' en 'centrum' in twee aparte definities te bespreken, om twee ineen te vermijden. Omdat de twee termen nauwelijks te definiëren zijn zonder van elkaar gebruik te maken, heeft Van Ceulen geprobeerd de lange zin in tweeën te splitsen.

De overige definities van Van Ceulen en Holtzman komen goed overeen. Holtzman voorziet de definities regelmatig van een uitleg, die Van Ceulen meestal niet overneemt. Van Ceulens doel was blijkbaar de inhoud zo kort en bondig mogelijk te formuleren. Bij de definitie van een driehoek zegt Holtzman bijvoorbeeld dat een driehoek een rechtlijnige figuur is met drie zijden of drie hoeken (Holtzman 1562, p. 3), terwijl Van Ceulen slechts eist dat een driehoek drie (rechte) zijden heeft (Van Ceulen 1615a, p. 71). In dit geval heeft Van Ceulen echter een legitieme vereenvoudiging doorgevoerd: ook Euclides eist slechts dat een driehoek drie zijden heeft, en zegt niets over het aantal hoeken (Euclides 1956, deel 1 p. 154).

Zoals gezegd heeft Van Ceulen alle definities van Holtzman overgenomen, op een na. Nadat hij verschillende typen vierhoeken gedefinieerd heeft (parallellogram, ruit, etc.), geeft Holtzman een definitie waarin hij vierhoeken die niet onder een van de voorgaande vallen „ongelijk" noemt. Deze definitie is ook terug te vinden bij Euclides: vierhoeken die geen speciale eigenschap hebben noemt hij trapezia. Van Ceulen zegt niets over zulke vierhoeken.

Bij Euclides volgen dan 5 postulaten. Holtzman heeft hiervan slechts 3 als postulaat overgenomen, namelijk dat tussen 2 punten altijd een rechte lijn te tekenen is, dat een recht lijnstuk steeds doorgetrokken kan worden zo ver men wil, en dat met een gegeven middelpunt en afstand altijd een cirkel getekend kan worden.

De overige twee postulaten van Euclides zeggen dat alle rechte hoeken aan elkaar gelijk zijn, en dat als twee lijnen een derde lijn snijden en de hoeken waarmee ze snijden aan dezelfde kant opgeteld minder dan twee rechte hoeken (180 graden) zijn, de twee lijnen elkaar aan die kant van de derde lijn ergens zullen snijden. Dit laatste is tegenwoordig bekend als het *parallellenpostulaat*, en na veel discussie werd in de 19^{e} eeuw duidelijk dat er over de waarheid van dit postulaat geen uitspraken gedaan kunnen worden. Holtzman schaarde de laatste twee postulaten echter juist onder zijn 'Communes Noticie': algemene inzichten (Holtzman 1562, p. 4).

Van Ceulen heeft geen van Holtzmans postulaten overgenomen. Wel zijn het postulaat over rechte hoeken die aan elkaar gelijk zijn en het parallellenpostulaat terug te vinden in Van Ceulens *Fondamenten*. Van Ceulen volgt namelijk vrij precies Holtzmans ‘Communes Noticie’, hoewel hij niet alles overneemt. Een van deze ‘Noticie’ van Holtzman is bijvoorbeeld de volgende:

> „Wanneer twee dingen precies even groot zijn, dat wil zeggen, wanneer ze op elkaar gelegd zouden worden, geen van beide over de andere uitsteekt, dan zijn die twee dingen aan elkaar gelijk”[5]

Van Ceulen heeft deze niet in zijn *Fondamenten* opgenomen, en heeft daarnaast veel van Holtzmans uitleg weggelaten.

Ook de definities die aan het begin van de verschillende boeken van Euclides en Holtzman staan, slaat Van Ceulen vaak over. Het gaat hierbij bijvoorbeeld om definities van een cirkel, een raaklijn, en de hoogte van een figuur. Veel van deze definities liggen inderdaad redelijk voor de hand, of zijn een herhaling van wat aan het begin van boek 1 al is genoemd, zoals de definitie van een cirkel. De definities aan het begin van boek 4, namelijk die waarin Holtzman ingeschreven en omgeschreven cirkels definieert, heeft Van Ceulen overgenomen in de vorm van een propositie. In deel 6 van de *Fondamenten* komt hier veel van terug, blijkbaar kon hij juist deze definities niet overslaan.

Van Ceulen nam zeker niet alle proposities van Euclides over. De selectie die hij maakte lijkt gebaseerd op wat nodig is voor bewijzen in de latere delen (zie paragraaf 4.2). De proposities die Van Ceulen wel selecteerde volgen redelijk chronologisch de volgorde zoals die ook bij Euclides en Holtzman voorkomt. Het gaat hierbij alleen om de boeken 1 tot en met 6 van de *Elementen*, waaruit Van Ceulen een selectie heeft gemaakt. Ook Holtzmans vertaling omvat alleen deze eerste zes boeken.

[5] „Wan zwai ding sich ausseinander reymen und schicken/da ist/so sy auff einander gelegt werden/kains das ander betrifft/die selben zwai ding sein einander gleich.” (Holtzman 1562, p. 5)

3 Vraagstukken in de *Fondamenten*

De delen 3 tot en met 6 van de *Fondamenten* bevatten een grote verzameling vraagstukken met uiteenlopende onderwerpen. De belangrijkste onderwerpen zal ik in dit hoofdstuk uitlichten.

3.1 De transformatie van figuren

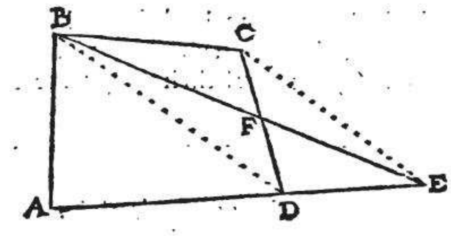
Aan het begin van deel 3 zegt Van Ceulen het volgende over de inhoud van dat deel: „Daer inne uit voorgaende gronde geleert wert de Figuere op menigerhande manieren te veranderen: Item die te deelen, daer by te voeghen, ende af te snijden na begeeren, wat gedeelte ofte andere grootheden men wil: Item de specien, eens deels met eenighe proeven van de voorgaende stucken door ghetallen etc." (Van Ceulen 1615a, p. 115).

Het eerste onderwerp dat Van Ceulen in dit citaat aankondigt, kan het beste samengevat worden als de 'transformatie van figuren'. Dit zal ik in deze paragraaf bespreken. In Van Ceulens tijd was het een belangrijk onderwerp, en het werd ook aan de ingenieursschool gedoceerd (Van Maanen 1987, p. 16). Volgens Van Maanen werd Van Ceulens *Fondamenten* gebruikt om dit onderdeel te onderwijzen (zie ook paragraaf 4.3). Het gaat hierbij om het omvormen van een figuur in een ander figuur met dezelfde oppervlakte, of het delen van een figuur volgens een gegeven verhouding. Van Ceulen vat dit kort samen bij het begin van het eerste vraagstuk:

> „Ende eerstelick eenen generalen reghel om alle veel-sijdighe Figueren te brengen in een Tryangel ofte quadraet,: Item daer van te maken viercanten op voorghegeven linien, in begheerde winckels: Item veel voor-ghegheven Tryangels, ofte veel ander rechtlinische Figueren in een Figuer, na begheeren te brenghen, etc." (Van Ceulen 1615a, p. 115)

Het eerste vraagstuk behandelt hoe een willekeurige vierhoek in een driehoek met dezelfde oppervlakte veranderd kan worden. In figuur 7 is $ABCD$ de gegeven vierhoek, die uiteindelijk wordt omgevormd naar driehoek ABE. De procedure hiervoor is als volgt. Trek de diagonaal BD, en trek vanuit punt C een lijn parallel aan deze diagonaal, deze snijdt de verlengde basis AD in E. Trek van dit snijpunt E naar B een lijn, en de driehoek ABE is de gevraagde driehoek.

Bij het bewijs verwijst Van Ceulen naar propositie 27 uit deel 2. Die luidt als volgt:



Figuur 7: Transformatie van een vierhoek naar een driehoek (Van Ceulen 1615a, p. 115)

> Prop 27: „Als een rechte Linie, in een Tryangel werdt ghetrocken, parallel teghen een van de zijden, alsoo dat de selve, beyde andere zijden, raecke, dan werden de selve ghedeelt in ghelijcke proportie: daerom, als een Linie door een Tryangel ghetrocken werdt, alsoo dat de deelen der zijden (welcke de ghetrocken Linie raeckt) ghelijcke proportie hebben, dan is de ghetrocken Linie parallel teghen de derde zijde." (Van Ceulen 1615a, p. 83)

Het is waarschijnlijker dat Van Ceulen niet propositie 27, maar propositie 24 bedoelt:

> Prop 24: „Alle Tryangels tusschen parallel Linien staende, op eenen ofte ghelijcken Basis zijn malcander ghelijck. Item, Als een paralellogram, met een Tryangel, eenen, ofte ghelijcken Basis heeft, staende mede tusschen ghelijck-wijdighe Linien, dan sal het viercant tweemael soo groot zijn als den Tryangel." (Van Ceulen 1615a, p. 81)

Met behulp van deze propositie volgt dat driehoek BCD en BED een gelijke oppervlakte hebben, zo zegt Van Ceulen. Inderdaad volgt uit propositie 24 dat deze twee driehoeken, die dezelfde basis BD hebben en beide tussen de parallelle lijnen BD en CE staan, gelijk zijn. Hiermee lijkt het bewijs af, maar Van Ceulen gaat nog verder, en gebruikt hiervoor de derde 'ghemeene bekentenisse': „Alsmen van ghelijcke dingen, gelijck veel substraheert sullen de resten mede ghelijck zijn" (Van Ceulen 1615a, p. 72). Hiermee laat hij zien dat de driehoeken BCF en FED aan elkaar gelijk zijn. Immers: van de gelijke driehoeken BDC en BED wordt hetzelfde stuk BFD afgetrokken om respectievelijk BCF en FED te verkrijgen. Nu is de driehoek ABE gelijk in oppervlak aan vierhoek $ABCD$, omdat de lijn BE het stuk BFC van de vierhoek afsnijdt, maar het precies even grote stuk FED toe voegt. Opvallend is dat Van Ceulen voor de gelijkheid van de driehoeken BCF en FED

nog een ‘ghemeene bekentenisse’ aanhaalt, maar het vergelijkbare geval van de gelijkheid van ABE en $ABCD$ blijkbaar voldoende voor de hand vindt liggen, zodat hij hier niet van een ‘ghemeene bekentenisse’ rept.

Zoals Van Ceulen van een vierhoek een hoek afsnijdt om die te transformeren naar een driehoek, kan hij in het algemeen een n-hoek naar een $(n-1)$-hoek transformeren met precies dezelfde methode. Van Ceulen formuleert dit echter niet zo algemeen, maar geeft nog een voorbeeld van een vijfhoek en een zeshoek die hij op dezelfde wijze transformeert. (Van Ceulen 1615a, pp. 115-116).

Dan volgt een groot aantal vraagstukken waarbij Van Ceulen meer eist dan transformeren naar een driehoek: de resulterende driehoek moet bijvoorbeeld gelijkzijdig zijn, of enkele driehoeken moeten bij elkaar opgeteld worden. Dit laatste gebeurt door de gegeven driehoeken los van elkaar te transformeren tot ze een gelijke hoogte hebben, en vervolgens de bases achter elkaar te plaatsen. De driehoek met de basis gelijk aan de bases naast elkaar en met de hoogte waarop alle driehoeken gebracht waren heeft een oppervlak gelijk aan de som van de oppervlaktes van de gegeven driehoeken.

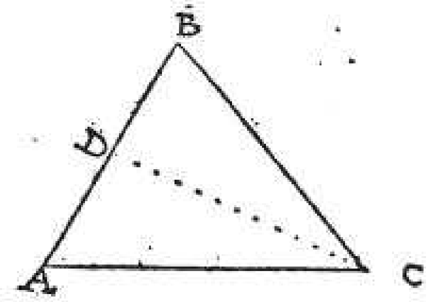
Ook de andere voorbeelden die Van Ceulen hier geeft zijn steeds gebaseerd op de transformatie van figuren zoals Van Ceulen die in het eerste vraagstuk uitlegt. Dit gedeelte krijgt hiermee het karakter van een leerboek: een uitleg van een procedure, gevolgd door een groot aantal oefenopgaven.

3.2 Deling van figuren

Het transformeren van figuren is nodig voor het volgende onderwerp dat Van Ceulen in deel 3 bespreekt: „Van deelinge der Figueren” (Van Ceulen 1615a, pp. 119-132). Ook in deel 5 komt nog een aantal vraagstukken over dit onderwerp terug (Van Ceulen 1615a, pp. 212-222). In zulke vraagstukken is het steeds de vraag een gegeven figuur te delen in bijvoorbeeld een aantal gelijke stukken.

Dit was een traditioneel probleem; veel voorgangers van Van Ceulen hadden hier aan gewerkt, waaronder Euclides, zij het niet in de *Elementen* maar in een ander werk: *Liber divisionum* (‘van de deling van figuren’). Dit boek was lange tijd verloren gewaand, tot een Arabische editie werd teruggevonden. In 1570 hadden John Dee en Federigo Commandino een Latijnse vertaling van dit Arabische werk gepubliceerd (De Wreede 2007, p. 219). Van Ceulen kan deze vertaling echter niet gelezen hebben, gezien het feit dat hij geen Latijn las.

Via tijdgenoten zoals Willebrord Snellius kan Van Ceulen echter wel in aanraking zijn gekomen met het onderwerp. Dit blijkt in het gedeelte van de *Fondamenten* waar de deling van figuren nog eens terugkeert (Van Ceulen



Figuur 8: Driehoek in twee gelijke stukken delen (Van Ceulen 1615a, p. 119)

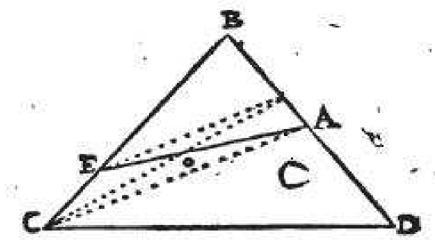
1615a, pp. 211-222). Een van de vraagstukken zou hem bijvoorbeeld zijn toegstuurd door Simon Stevin, die er zelf in zijn boek *Problemata Geometrica* aandacht aan had besteed. Verderop refereert Van Ceulen onder andere ook nog aan Willebrord Snellius en Ioannis Baptista Benedictus, die zich met dit onderwerp hadden bezig gehouden (Van Ceulen 1615a, pp 211-212; De Wreede 2007, p. 218).

Een eenvoudig voorbeeld van de deling van een figuur is Van Ceulens eerste vraagstuk over het onderwerp. Hier is het de vraag een driehoek in twee gelijke stukken te delen. De oplossing is eenvoudig: trek een lijn vanuit hoekpunt C op het midden van de overstaande zijde AB (zie figuur 8).

Dat dit de driehoek inderdaad in twee gelijke stukken deelt, is volgens Van Ceulen te bewijzen met behulp van propositie 38 uit boek 1 van Euclides, en propositie 1 uit boek 6 van Euclides. Die zeggen respectievelijk het volgende: „Driehoeken op gelijke bases en tussen dezelfde parallellen zijn aan elkaar gelijk" (Euclides 1956, deel 1 p. 333) en „Driehoeken en parallellogrammen onder dezelfde hoogte hebben een verhouding tot elkaar als hun bases." (Euclides 1956, deel 2 p. 191).

Het is opmerkelijk dat Van Ceulen hier niet verwijst naar proposities uit deel 2 van zijn eigen werk. De twee proposities van Euclides die hij hier gebruikt, vormen samen namelijk precies propositie 26 in deel 2 van de *Fondamenten*:

> Prop 26: „Alle Tryangels, ofte even-wijdighe viercanten, staende tusschen parallel Linien, op eenen ofte ghelijcken Basis, zijn malcander ghelijck: ende soo verre sulcke Figueren staen op onghelijcke Basis, zijn dan mede gheproportioneert als hare Basis." (Van Ceulen 1615a, p. 83)



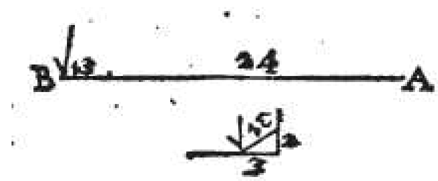
Figuur 9: Een derde deel van een driehoek afsnijden (Van Ceulen 1615a, p. 120)

Deze propositie lijkt op propositie 24 (zie paragraaf 3.1). Het verschil zit in het tweede gedeelte: propositie 26 relateert twee driehoeken of parallellogrammen met verschillende bases en gelijke hoogtes aan elkaar via de proportie die de bases tot elkaar hebben.

Op basis van deze propositie (of met behulp van de twee corresponderende proposities uit Euclides) kan inderdaad bewezen worden dat de lijn CD de driehoek in twee gelijke stukken deelt. Trek namelijk een lijn door C parallel aan AB. Dan staan de driehoeken ADC en BCD beide tussen de parallelle lijnen AB en de lijn door C. Bovendien hebben ze gelijke bases AD en BD, aangezien AB precies in tweeën is gedeeld. De driehoeken ADC en BCD zijn dus met de bovenstaande propositie 26 aan elkaar gelijk.

Van Ceulen laat zien dat dezelfde methode werkt voor andere vraagstukken waarbij driehoeken gedeeld moeten worden: hij geeft een voorbeeld waarin een driehoek in drie gelijke stukken gedeeld moet worden, en concludeert aan het eind: „door desen middel zijn alle Tryangels te deelen in soo veel deelen, ofte in soodanighe proportie alsmen begheert." (Van Ceulen 1615a, p. 120). Vervolgens stelt Van Ceulen eisen aan de manier waarop een driehoek gedeeld wordt, zoals dat de lijn parallel moet zijn aan de basis, of door een gegeven punt op een zijde moet gaan. Zulke problemen kunnen opgelost worden door met de methode zoals die hierboven besproken is de driehoek te delen, en vervolgens met behulp van de transformatie van figuren de snijdende lijn te verplaatsen om aan de gestelde eisen te voldoen.

Van Ceulen laat dit bijvoorbeeld zien bij een vraagstuk (Van Ceulen 1615a, p. 120) waarin van driehoek CBD een derde deel moet worden afgesneden met behulp van een lijn vanuit punt A op de zijde (zie figuur 9). Eerst wordt de basis BD in drieën gedeeld, waarna op een van die delen de lijn naar hoekpunt C wordt getrokken. Deze gevonden driehoek kan met behulp van de voorgaande theorie getransformeerd worden zodat een hoekpunt



Figuur 10: Lijn construeren (Van Ceulen 1615a, p. 133)

in A ligt. Hiermee volgt dat driehoek BAE een derde deel van de driehoek BDC vormt, zodat de lijn AE inderdaad een derde deel afsnijdt.

3.3 Rekenen met lijnstukken

Midden in het derde deel heeft Van Ceulen een onderdeel „De Spetien in linien" toegevoegd. Hierin laat hij zien hoe met lijnstukken gerekend kan worden. Wanneer bijvoorbeeld twee lijnstukken gegeven zijn, is het de bedoeling de som of het product hiervan te construeren.

Van Ceulen begint dit onderdeel met een abstracte uitleg van het optellen van twee lijnen: gegeven twee lijnen A en B, dan kan een lijn met de lengte van A en B samen verkregen worden door de twee lijnen achter elkaar te plaatsen. Later volgt een vergelijkbare uitleg van aftrekken: het verschil van A en B kan verkregen worden door de kortste lijn langs de langste te leggen, en naar de overblijvende rest te kijken. Voor de exacte constructie van die 'rest' verwijst Van Ceulen naar Euclides.

Van Ceulen licht dit toe met een aantal voorbeelden. Gegeven is bijvoorbeeld een lijn van lengte 24, gevraagd wordt met behulp van passer en lineaal een lijn van lengte $\sqrt{13}$ te tekenen (zie figuur 10). Deel dan de gegeven lijn op in eenheden, en neem met behulp daarvan een lijn van lengte 3, en een lijn van lengte 2. Zet deze loodrecht op elkaar, dan heeft de schuine lijn lengte $\sqrt{13}$. Dit geldt vanwege de stelling van Pythagoras, die Van Ceulen aanhaalt in de vorm van propositie 47 uit het eerste boek van Euclides.

Van Ceulen verwijst hier ook naar propositie 22 uit deel 2 van de *Fondamenten*. Die gaat echter over het construeren van een vierkant op een gegeven lijn, zodat het opnieuw een verkeerde verwijzing is: hij zal propositie 23 bedoelen, aangezien die evenals propositie 47 van boek 1 van Euclides de stelling van Pythagoras bevat.

De voorbeelden over optellen en aftrekken met lijnen lost Van Ceulen steeds op door handig lijnstukken uit te kiezen, en vervolgens de stelling van Pythagoras een of meerdere keren toe te passen. Ook gebruikt hij een aantal keer de constructie van een zogenaamde middelproportionaallijn. Gegeven twee lijnstukken AB en BC, dan is de middelproportionaallijn het lijnstuk DE zodat $AB : DE = DE : BC$. In deze context gebruikt Van Ceulen dit om een lijnstuk met een lengte gelijk aan de wortel van de lengte van een gegeven lijnstuk te construeren. Van Ceulen legt dit verder niet uit, maar het is eenvoudig in te zien dat deze constructie inderdaad werkt: neem voor AB lengte 1, en voor BC de lengte van het gegeven lijnstuk, laat dit lengte x zijn. Er geldt dan $1 : DE = DE : x$ zodat $1 \cdot x = DE \cdot DE$, waaruit volgt dat $DE^2 = x$, zodat inderdaad $DE = \sqrt{x}$. Deze middelproportionaallijn kan met behulp van een passer en lineaal geconstrueerd worden, zoals Van Ceulen dit uitlegt in propositie 64 van deel 2.

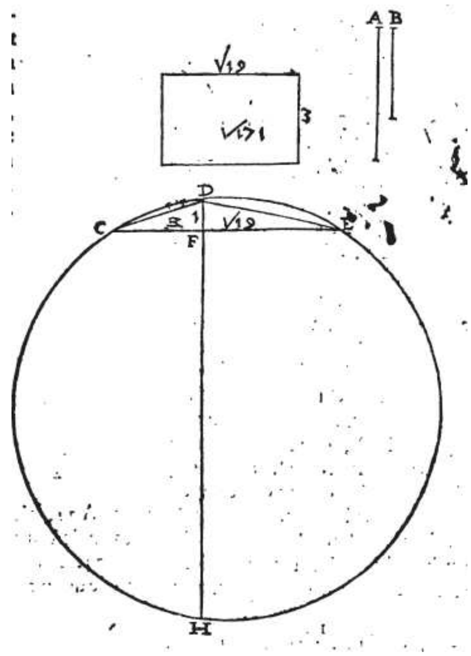
Een precair punt bij het rekenen met lijnen, is het vinden van een lijnstuk met lengte 1. Wanneer in de opgave een lijnstuk gegeven is met een lengte gelijk aan een geheel getal, is het niet moeilijk de bijbehorende eenheid terug te vinden. Maar als alleen een lijnstuk met een lengte van bijvoorbeeld $\sqrt{28}$ gegeven is, kan deze niet in een aantal gelijke stukken worden opgedeeld om de eenheid te vinden.

De methode die Van Ceulen hiervoor gebruikt, begint met het aannemen van een lengte als referentie-eenheid. Op basis hiervan construeert hij een lijnstuk, dat in termen van deze nieuwe eenheid dezelfde lengte heeft als het gegeven lijnstuk. In het geval van $\sqrt{28}$ gaat het dus om een lijnstuk dat op basis van de gekozen eenheid een lengte van $\sqrt{28}$ zou hebben, maar dat niet even lang is als de gegeven lijn met die lengte, omdat ze gebaseerd zijn op verschillende eenheden. Als 1 de gezochte eenheid aangeeft, en $1'$ de gekozen eenheid, A het gegeven lijnstuk van lengte $\sqrt{28}$, en A' het geconstrueerde lijnstuk van lengte $\sqrt{28}$ op basis van de gekozen eenheid, dan geldt: $1 : 1' = A : A'$. Zo kan met behulp van de verhoudingen de juiste eenheid bepaald worden.

Het vermenigvuldigen en delen van lijnen legt Van Ceulen beide uit met een paar voorbeelden. Hierbij maakt hij gebruik van propositie 35 uit het derde boek van Euclides, en propositie 51 uit deel 2 van de *Fondamenten*. Opnieuw is dit een verkeerde verwijzing: hij zal propositie 50 uit deel 2 bedoelen, die hetzelfde zegt als de propositie van Euclides:

> Prop 50: „Als twee linien malcander doorsnijden in eenen Circkel, dan zijn de recht-hoeckige viercanten der deelen, malcander ghelijck." (Van Ceulen 1615a, p. 94)

De illustratie (zie figuur 11) maakt duidelijk wat Van Ceulen met deze propositie bedoelt. Als de twee lijnen CE en DH elkaar snijden in punt F, dan is het product van DF en FH gelijk aan het product van CF en FE, dus $DF \cdot FH = CF \cdot FE$.



Figuur 11: Het vermenigvuldigen van lijnen (Van Ceulen 1615a, p. 94)

Om deze propositie toe te passen tekent Van Ceulen eerst een rechthoek met de lengtes als zijden. In het eerste voorbeeld gaat het om de lengtes 3 en $\sqrt{19}$. Dan tekent hij de lengtes achter elkaar met in het punt waar ze aan elkaar liggen een lijn van lengte 1 er loodrecht op. Hiermee ontstaat driehoek CDE in figuur 11, waarbij hij de omgeschreven cirkel tekent. Een methode om dit te doen staat in propositie 56 van deel 2, hoewel Van Ceulen daar niet naar verwijst. Met behulp van de bovenstaande propositie volgt dat $CF \cdot FE = DF \cdot HF$. Omdat DF lengte 1 heeft, wordt dit $HF = 3 \cdot \sqrt{19}$, het gevraagde lijnstuk.

Het rekenen met lijnstukken was in de tijd van Van Ceulen niet geheel nieuw. Wat wel nieuw was, was Van Ceulens interpretatie waarbij hij aan een lijnstuk een getal koppelt, dat de lengte representeert. Op die manier kan hij rekenen met de lengte van een lijnstuk, zonder te kijken naar de meetkundige eigenschappen van dit lijnstuk (De Wreede 2007, p. 205, Van Ceulen 1615a, pp. 132-139). Van Ceulen gebruikt deze benadering bijvoorbeeld bij het vermenigvuldigen van lijnstukken. In de traditionele visie zou het vermenigvuldigen van twee eendimensionale lijnstukken in een tweedimensionale rechthoek resulteren. Van Ceulen beschouwt het product van twee lijnstukken echter ook als lijnstuk.

Van Ceulen kon twee lijnstukken vermenigvuldigen met als resultaat opnieuw een lijnstuk, omdat hij een aparte grootheid instelde om de lengte van een lijnstuk aan te geven. Het vraagstuk om twee lijnstukken te vermenigvuldigen verandert hiermee eigenlijk in iets anders: gegeven twee lijnstukken met bekende lengte, construeer dan het lijnstuk dat verkregen wordt door de lengtes van de twee gegeven lijnstukken te vermenigvuldigen.

Van Ceulens benadering van lijnstukken en hun lengtes stuitte Willebrord Snellius tegen de borst bij het vertalen van de *Fondamenten* (zie ook paragraaf 4.2). Bij dit gedeelte gaf hij dan ook veel commentaar, en Snellius zei over Van Ceulen:

> „Wat deze auteur zegt, namelijk dat het resultaat van meetkundige vermenigvuldiging van twee lijnen een lijn is, wordt niet door enige autoriteit ondersteund, evenals dat wat volgt, namelijk dat een lijn het resultaat is van een deling van twee lijnen op elkaar”[6]

Snellius was verontwaardigd over de slordige aanpak van Van Ceulen, maar moest zich er bij neerleggen dat de oplossing wel juist was. De vraagstukken formuleerde hij dus zo, dat ze meetkundig toch correct waren, bijvoorbeeld:

> „Gegeven twee lijnen volgens dezelfde maat, A is $\sqrt{19}$ en B is 3, gevraagd wordt, als de rechthoek die zij omvatten zou worden aangepast aan de eenheid van dezelfde maat, wat dan de lengte is die zo ontstaat. Met andere woorden: als de verhouding 1 eenheid tot B 3 gelijk is aan de verhouding van A $\sqrt{19}$ tot de onbekende, [wat is de onbekende]?”[7]

Met het aanpassen van een rechthoek aan een eenheid bedoelt Snellius het volgende. Hij zoekt een rechthoek met het oppervlak gelijk aan het oppervlak van de gegeven rechthoek, maar met een zijde gelijk aan 1 (‘de eenheid van dezelfde maat’). De andere zijde van deze gevonden rechthoek is dan de gezochte lengte. In paragraaf 4.2 zal ik dieper ingaan op Snellius’ commentaar.

[6] „Namque quod hic autor postulat duarum linearum multiplicatione Geometrica lineam fieri, tam $\alpha\kappa\upsilon\rho o\nu$ est, quam id quod sequitur mutua duarum linearum divisione lineam existere.” (Van Ceulen 1615b, pp 113, vertaald uit: De Wreede 2007, p. 212)

[7] „Dantur duae rectae secundum eiusdem mensurae aestimationem A $\sqrt{19}$, B 3, quaeritur si rectangulum ab ipsis comprehensum ad eiusdem mensurae unitatem applicetur, quae num sit longitudo inde existens. Vel ut 1 mensura ad B 3, sic A $\sqrt{19}$ ad quem.” (Van Ceulen 1615b, p. 113 vertaald uit: De Wreede 2007, p. 213)

3.4 De regel van Heron

Na het rekenen met lijnstukken volgen „eenighe Geometrische vragen, waer in eendeels het gebruyck der voorgestelder *Fondamenten* geleert wert" (Van Ceulen 1615a, p. 139). Op het eerste gezicht lijkt dit een verzameling opgaven aan te kondigen, aan de hand waarvan de lezer de voorgaande theorie kan oefenen. Voor oefenopgaven is het niveau echter wel erg hoog. Van Ceulen bespreekt een aantal ingewikkelde en interessante problemen, zoals bijvoorbeeld de kwadratuur van de cirkel.

De kwadratuur van de cirkel is een oud probleem, waarbij gevraagd wordt een vierkant te construeren met het oppervlak gelijk aan het oppervlak van een gegeven cirkel. In exacte zin is dit een onoplosbaar probleem, maar Van Ceulen laat hier een aantal benaderingen van oplossingen zien, gebaseerd op die van Archimedes en Francisco Vieta (François Viète). Ook enkele andere voorbeelden die te maken hebben met oppervlaktes van figuren komen hier aan bod. Uiteindelijk bespreekt Van Ceulen eigenschappen van driehoeken en hun oppervlaktes, en bouwt hiermee op naar een regel waarmee de oppervlakte van een driehoek aan de hand van zijn drie zijden berekend kan worden. De eerste verschijning van deze regel was in een werk uit de eerste eeuw na Christus van de hand van Heron van Alexandrië. De regel staat tegenwoordig dan ook bekend als Herons regel:

> Herons regel: „Reghel om alle Tryangels te meten. Addeert de zijden des Tryan-, de somme halveert, vant comende substraheert elcke zijde byzonder, dese dry resten met den halven deel (der zijden) door malcander ghemultipliceert, uyt den product de quadraat-wortel gheextraheert: de selve wortel gheeft te kennen de groote des Tryangels." (Van Ceulen 1615a, p. 146)

Bij een driehoek ABC met zijden a, b en c zegt de regel in moderne notatie dus het volgende:

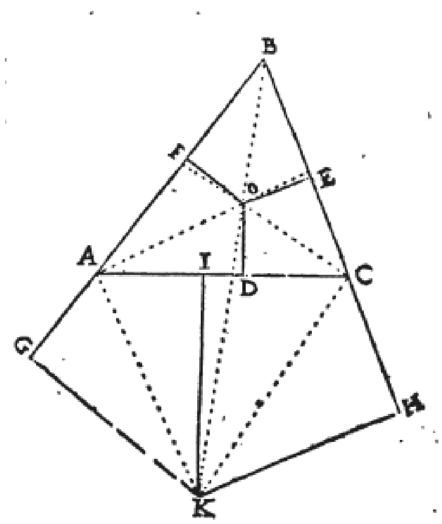
$$\mathrm{Opp}(ABC) = \sqrt{s \cdot (s-a) \cdot (s-b) \cdot (s-c)}$$

met

$$s = \frac{1}{2}(a+b+c).$$

Van Ceulen bewijst deze regel met behulp van gelijkvormige driehoeken. In de driehoek ABC (zie figuur 12[8]) trekt hij daartoe de volgende lijnen:

[8]Van Ceulen verwisselt in zijn tekst consequent de letters G en H uit de figuur. In de uitleg die volgt corrigeer ik dit zodat het weer klopt met Van Ceulens illustratie (figuur 12).



Figuur 12: figuur bij bewijs van Herons regel. (Van Ceulen 1615a, p. 146)

- De bissectrices uit de hoeken A, B en C die elkaar snijden in punt O.
- De loodlijnen OD op zijde AC, OE op zijde BC en OF op zijde AB.
- Verleng zijde BC tot in H, zo dat $CH = AD$.
- Verleng zijde AB tot in G, zo dat $AG = CD$.
- Teken de loodlijn op BH in H en de loodlijn op BG in G. Het snijpunt van deze loodlijnen is K.
- Trek de lijnen AK en KC.
- Neem I op AC zodat $AI = DC$.
- Trek vanuit I een rechte lijn naar K.
- Trek de lijn BK.

Op basis van deze constructie gelden de volgende eigenschappen: de loodlijnen OD, OE en OF zijn aan elkaar gelijk. Dit volgt met gebruik van een eerder bewezen resultaat in de *Fondamenten*. Ook AF en AD zijn hierdoor gelijk, evenals CD en CE, en BE en BF. Omdat ook $CH = AD$ en $AG = CD$ volgt $FG = EH = AC$. Omdat $BE = BF$ volgt $BG = BH$. De hoeken $\angle BGK$ en $\angle BHK$ zijn wegens de constructie gelijk, zodat de driehoeken BGK en BHK een hoek en twee zijden ($BH = BH$ en $BK = BK$)

gelijk hebben, en dus gelijkvormig zijn. Daaruit volgt $\angle ABK = \angle KBH$ en $GK = HK$. Bovendien zijn $\angle BFO$ en $\angle BGK$ beide recht, zodat BFO en BGK gelijkvormig zijn. Ook BEO en BHK zijn gelijkvormig omdat $\angle BEO$ en $\angle BHK$ gelijk zijn. Dat betekent dat het punt O op BK moet liggen. Verder geldt:

- $BE = BF$, $CE = CD$, $AD = AF$.
- $AF = AF = CH$, $CE = CD = AG$, $AF = AC = EH$, $BG = BH$.
- $HK = GK$.
- $BG + BH = AB + BC + AC$.

Om de formule te bewijzen kan Van Ceulen dus in plaats van $s = \frac{1}{2}(AB + BC + AC)$ invullen $s = BG = BH$. Met gebruikmaking van de bovenstaande gelijkheden volgt dus $(s - AC) = BE = BF$, en $(s - AB) = AG = CD$, $(s - BC) = CH = AD$. Dan geldt bovendien wegens de stelling van Pythagoras

$$CK^2 - AK^2 = (KH^2 + CH^2) - (GK^2 + AG^2) = CH^2 - AG^2 = CI^2 - AI^2$$
$$= (IK^2 + CI^2) - (IK^2 + AI^2).$$

Hieruit volgt dat IK loodrecht op AC moet staan. Dat betekent dat AK de diagonaal van de vlieger $AIKG$ vormt, en deze dus in twee gelijke stukken deelt. De hoeken GAI en IKG zijn samen gelijk aan een gestrekte hoek, evenals de hoeken GAI en FAD. Dat betekent dat $\angle IKG = \angle FAD$, en analoog $\angle GAI = \angle FOD$. De vierhoeken $AIKG$ en $AFOD$ moeten dus gelijkvormig zijn, en hun diagonalen delen ze in gelijkvormige driehoeken. Dat betekent dat $AFO \sim KGA$.

Uit deze gelijkvormigheid volgt:

$$FO : FA = GA : GK, \text{ dus } FA \cdot GA = FO \cdot GK.$$

Vermenigvuldigen van het voorgaande met $\frac{FO}{GA}$ geeft

$$FO^2 : (FA \cdot GA) = (GA \cdot (FO : GA)) : GK = FO : GK$$

$$FO : GK = BF : BG, \text{ want } FOB \sim GKB.$$

Van Ceulen rekent hier verder met de waarden van de zijden zoals hij die in een voorbeeld eerder gebruikte, om te laten zien dat de gewenste regel in dat specifieke voorbeeld uitkomt. In moderne notatie kan dit als volgt:

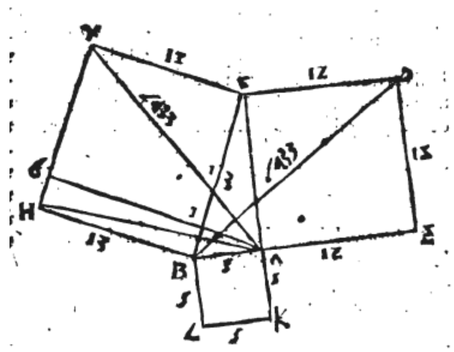
$$BG : BF = GA \cdot AF : FO^2$$
$$BF \cdot GA \cdot GF = FO^2 \cdot BG$$
$$BG \cdot BF \cdot GA \cdot GF = FO^2 \cdot BG^2$$
$$s \cdot (s - AC) \cdot (s - AB) \cdot (s - BC) = (FO \cdot BG)^2$$
$$\sqrt{s \cdot (s - AC) \cdot (s - AB) \cdot (s - BC)} = FO \cdot (BF + AF + CD)$$
$$\sqrt{s \cdot (s - AC) \cdot (s - AB) \cdot (s - BC)} = FO \cdot BF + FO \cdot AF + FO \cdot CD$$
$$\sqrt{s \cdot (s - AC) \cdot (s - AB) \cdot (s - BC)} = \frac{1}{2} \cdot AB \cdot FO + \frac{1}{2} \cdot AC \cdot FO + \frac{1}{2} \cdot BC \cdot FO.$$

Links staat de gezochte regel, en rechts staan de oppervlaktes ($\frac{1}{2}$·basis·hoogte) van de drie driehoeken BOC, BOA en AOC die samen het oppervlak van de gehele driehoek vormen. Hiermee is de regel bewezen.

Het bewijs dat Van Ceulen geeft voor deze regel vertoont grote overeenkomsten met het bewijs zoals Heron dat zelf ooit gaf, en is in essentie hetzelfde (De Wreede 2007, p. 270). Ten tijde van de publicatie van de *Fondamenten* begon men echter juist kritiek te leveren op dit oude bewijs, omdat het gebruik maakte van vermenigvuldigingen die meetkundig gezien geen betekenis hadden. In de derde stap van de laatste afleiding van de regel (zie boven) worden namelijk vier grootheden met elkaar vermenigvuldigd. Meetkundig gezien zou dit een vierdimensionaal resultaat moeten opleveren, iets dat in die tijd onmogelijk werd geacht.

Wellicht heeft Van Ceulen gedacht het bekritiseerde gedeelte te kunnen vermijden door aan het einde van het bewijs over te stappen naar een voorbeeld. Maar ook in dit voorbeeld worden vier grootheden met elkaar vermenigvuldigd, en bij het type bewijs dat Van Ceulen geeft is deze stap onvermijdelijk.

In zijn vertaling van de *Fondamenten* was Snellius het dan ook niet eens met deze aanpak. Wel vertaalde hij eerst Van Ceulens bewijs, maar voorzag het daarna van stevig commentaar, en gaf zelf een alternatief bewijs (De Wreede 2007, p. 271). Het vermenigvuldigen van vier grootheden zodat een vierdimensionaal object ontstaat, vermeed Snellius door de volgende methode te gebruiken (zie ook pagina 33). Gegeven een lijnstuk en een vlak figuur, dan betekent het aanpassen van deze figuur op het lijnstuk dat er een rechthoek gevonden moet worden die een even groot oppervlak heeft als de gegeven figuur, en een zijde zo lang als het gegeven lijnstuk heeft. Dit is vergelijkbaar met het 'delen' van een figuur door een gegeven lijnstuk (zie ook paragraaf 3.3).



Figuur 13: Bewijs van de stelling van Pythagoras (Van Ceulen 1615a, p. 156)

Wanneer twee figuren op dezelfde lijn toegepast worden, kan het verschil in oppervlak van deze figuren uitgedrukt worden als de lengte van een lijnstuk. Het verschil tussen twee tweedimensionale figuren wordt hiermee teruggebracht tot een eendimensionaal lijnstuk. Door op deze manier het aantal dimensies terug te brengen kan het vierdimensionale product in het bewijs vermeden worden (De Wreede 2007, p. 273).

3.5 Getallenvoorbeelden

Aan het eind van het derde deel van de *Fondamenten* heeft Van Ceulen een „Byvouch des derden Deels” toegevoegd. Over de inhoud hiervan zegt hij zelf: „Volgt nu de bewijsinge etlicker voorgaender propositien door ghetallen, om des liefhebbers wille gestelt om hun daer na te oeffenen, op dat hij lustich ende seker met de ghetallen leert wercken, ende de exempels des volghenden deels niet schroomt te maecken.” (Van Ceulen 1615a, p. 156).

Van Ceulen belooft hier dus enkele van de voorgaande proposities te ‘bewijzen’ door middel van getallen. De vraagstukken en voorbeelden die hij hier bespreekt, zijn echter geen complete bewijzen, maar eerder getallenvoorbeelden die aantonen dat een stelling in een specifiek geval klopt. Daarmee is dit gedeelte vooral een voorbereiding op het volgende deel, zoals Van Ceulen zelf ook zegt. Deel 4 gaat namelijk in het geheel over figuren waarvan de oppervlakte of juist de afmetingen van enkele zijden bekend zijn, en gevraagd wordt de overige afmetingen te berekenen (zie paragraaf 3.6).

Van Ceulen begint het ‘byvouch’ met de stelling van Pythagoras, waarbij hij opnieuw verwijst naar propositie 22 uit deel 2 van de *Fondamenten* in plaats van propositie naar 23. Hij herhaalt hier eerst in het kort nog eens het bewijs zoals hij dat in deel 2 reeds gaf (zie paragraaf 2.2).

Tenslotte laat hij met het getallenvoorbeeld in figuur 13 zien dat de stelling in het gegeven voorbeeld in ieder geval klopt. Bekijk vierhoek $HBIG$ en driehoek ABH in de figuur. De zijde HB en AB zijn bekend (13 en 5), en de derde zijde AH kan berekend worden: $\sqrt{314}$. Vanaf hier berekent Van Ceulen de oppervlakte van de driehoek ABH met de regel van Heron: als

$$s = \frac{1}{2}(a + b + c)$$

dan is

$$\text{Opp}(ABC) = \sqrt{s \cdot (s - a) \cdot (s - b) \cdot (s - c)}.$$

Invullen geeft

$$2s = 5 + 13 + \sqrt{314} = 18 + \sqrt{314}$$

$$s = 9 + \sqrt{78\frac{1}{2}}$$

$$s - \sqrt{314} = 9 - \sqrt{78\frac{1}{2}},\ s - 13 = \sqrt{78\frac{1}{2}} - 4,\ s - 4 = \sqrt{78\frac{1}{2}} + 4$$

$$s \cdot (s - \sqrt{314}) = 81 - 78\frac{1}{2} = 2\frac{1}{2}$$

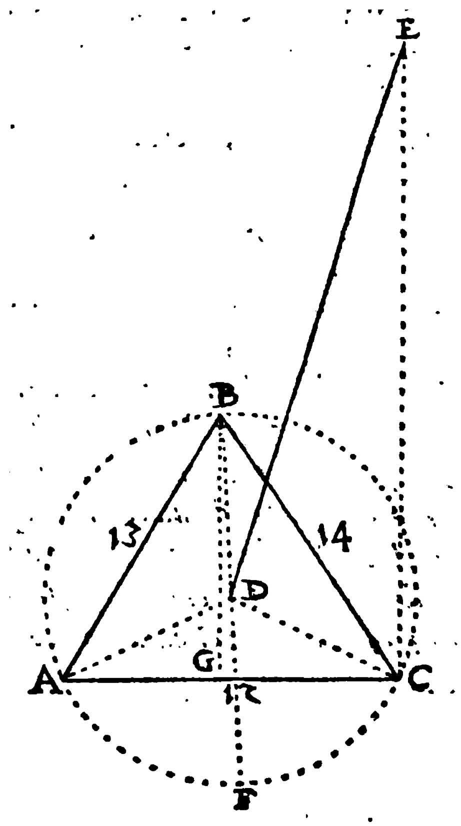
$$(s - 13) \cdot (s - 5) = 78\frac{1}{2} - 16 = 62\frac{1}{2}$$

$$\sqrt{s \cdot (s - \sqrt{314}) \cdot (s - 13) \cdot (s - 5)} = \sqrt{2\frac{1}{2} \cdot 62\frac{1}{2}} = \sqrt{156\frac{1}{4}} = 12\frac{1}{2}.$$

Vierhoek $GHBI$ is twee maal zo groot als driehoek ABH, dus het oppervlak van $GHBI$ is 25, en gelijk aan $ABLK$, wat in te zien is doordat het oppervlak van $ABLK$ het kwadraat is van zijde $AB = 5$. Op dezelfde manier, maar met minder uitleg berekent Van Ceulen de oppervlaktes van de andere driehoeken en vierhoeken, en laat hij zien dat de stelling in dit voorbeeld klopt.

Een bewijs voor de stelling van Pythagoras is dit zeker niet. Wat het getallenvoorbeeld vooral bereikt, is dat de lezer nu gezien heeft hoe hij de stelling kan gebruiken, en een gevoel heeft gekregen voor het rekenen met getallen.

In het 'byvouch' bespreekt Van Ceulen in totaal 14 voorbeelden of vraagstukken, waarvan er 6 een bespreking zijn van een propositie uit het tweede deel van de *Fondamenten*. Net als de stelling van Pythagoras bewijst hij deze proposities niet, maar laat Van Ceulen met een getallenvoorbeeld zien dat ze in een voorbeeldgeval kloppen. Andere onderwerpen in dit 'byvouch' gaan over het berekenen van de hoogtelijn van een driehoek, de kwadratuur van de cirkel, en het berekenen van de omtrek van een cirkel. Bij deze laatste



Figuur 14: Illustratie bij een driedimensionaal probleem (Van Ceulen 1615a, p. 175)

twee onderwerpen neemt hij steeds aan dat de verhouding tussen omtrek en diameter (π) reeds bekend is; hiervoor verwijst Van Ceulen naar zijn boek *Vanden Circkel*.

De bewijzen die Van Ceulen aan het begin van dit 'byvouch' aankondigt, zijn niet meer dan enkele getallenvoorbeelden. Daarmee lijkt dit gedeelte bedoeld als vingeroefening voor de lezer, het gaat er vooral om handig te leren rekenen met getallen, en eens de toepassing van een stelling te zien. Vooral een vraagstuk zoals het berekenen van de hoogtelijn van een driehoek lijkt in het bijzonder een voorbereidende oefening voor het vierde deel, dat ik in de volgende paragraaf zal bespreken.

3.6 Driehoeksvraagstukken

In Van Ceulens tijd behandelden veel auteurs vraagstukken waarbij ze vroegen de zijden van een driehoek te berekenen, wanneer bepaalde afmetingen gegeven waren (Bos 2001, p. 88). Zulke vraagstukken behandelt Van Ceulen in deel 4. In zijn vertaling van de *Fondamenten* interpreteerde Snellius het 'byvouch' bij deel 3 als voorbereiding op deze vraagstukken, en hij verwijderde het uit deel 3 en voegde het toe aan het begin van deel 4 (zie ook paragraaf 4.2).

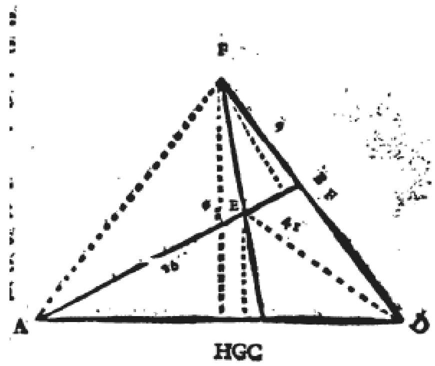
Inderdaad lijkt het 'byvouch' vooral een oefening voor de lezer om handig met getallen te leren rekenen. In de voorbeelden in deel 4 komen deze rekenvaardigheden goed van pas: het eerste vraagstuk gaat bijvoorbeeld over het berekenen van het oppervlak van een gelijkzijdige driehoek, waarvan de zijden gegeven zijn. Later bespreekt Van Ceulen ook ingewikkelder problemen, waarvan één zelfs driedimensionaal is (zie figuur 14):

> "Op een effen veldt ghelijckformich desen hier ghestelden Tryangel, is een voghel-stange recht perpendiculariter ghestelt, alsoo dat van elcken winckel tot aen den voghel daer op staende, effen verde is, te weten $29\frac{69}{72}$ van een seker mate, men vraegt naer de hooghde der stange, hier geteeckent met DE, antwoort $28\frac{7}{9}$ der selver mate." (Van Ceulen 1615a, p. 175)

Dit is het enige driedimensionale probleem in de *Fondamenten*, en Van Ceulen reduceert het direct tot een tweedimensionaal probleem: aangezien de top van de 'voghel-stange' een gelijke afstand heeft tot elk hoekpunt van de driehoek, moet deze 'voghel-stange' met zijn voetpunt het middelpunt vormen van een cirkel die door alle hoekpunten van de driehoek gaat. Nu hoeft nog slechts de omgeschreven cirkel gevonden te worden die in het platte vlak door de drie hoekpunten van de driehoek gaat. De straal van deze cirkel is tevens de lengte van zijde CD van driehoek CDE, die in het vlak loodrecht op het grondvlak staat. Het berekenen van zijde DE van deze driehoek is opnieuw een tweedimensionaal probleem, en eenvoudig op te lossen aangezien de andere zijden van deze driehoek bekend zijn.

De overige vraagstukken van deel 4 zijn tweedimensionaal. Van Ceulen berekent bijvoorbeeld de oppervlakte van een driehoek of de lengte van een hoogtelijn wanneer alle zijden bekend zijn. Vaak formuleert hij de problemen als voorbeelden uit de landmeterij: Van Ceulen spreekt van een driehoekig stuk land, in plaats van een abstracte driehoek. Later worden de problemen echter ingewikkelder, en minder praktisch toepasbaar. Probleem 35 is bijvoorbeeld een probleem dat Van Ceulen toegezonden kreeg van Simon Stevin, en reeds in 1582 oploste, zo zegt hij zelf. Het ging om het volgende (zie figuur 15):

> „In dese Figuer doet AD 25, AE 16, EB 4, BD 11, ende FB 9, vrage naer AC ende CD." (Van Ceulen 1615a, p. 187)



Figuur 15: Illustratie bij probleem 35 van deel 4 (Van Ceulen 1615a, p. 187)

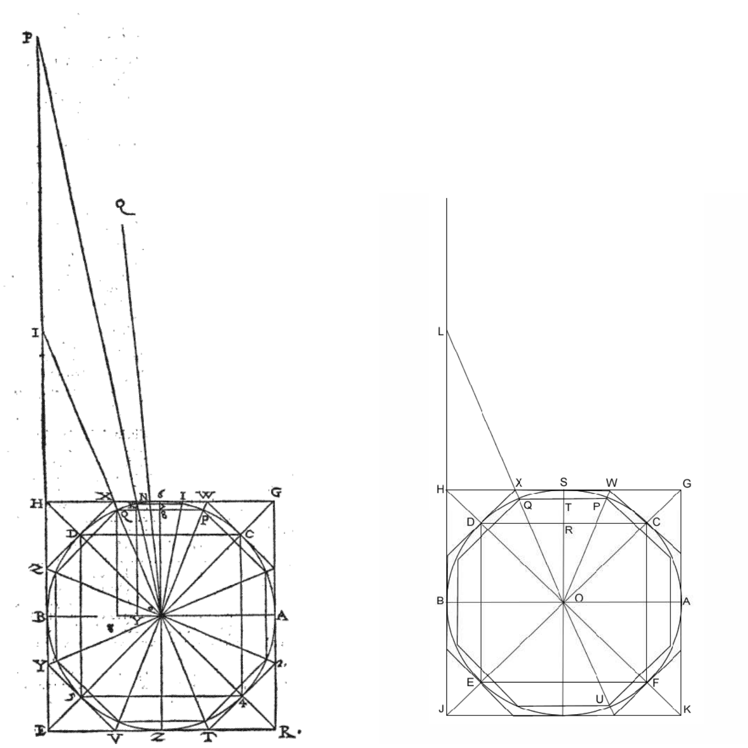
Van Ceulen vindt de oplossing door de hoogtelijnen te bepalen, en verschillende oppervlaktes van driehoeken te berekenen. De oplossing is niet bijzonder ingewikkeld, maar er moeten veel bewerkingen worden uitgevoerd om tot het antwoord te komen. Van Ceulen laat hiermee zien hoe de voorgaande vraagstukken gecombineerd een ingewikkelder probleem kunnen oplossen.

3.7 Cirkelberekeningen

De samenhang van de delen 1 tot en met 4 is redelijk duidelijk, zoals bleek in de voorafgaande paragrafen. In paragraaf 4.2 zal ik daar nog uitvoeriger op in gaan. Deel 5 is een verzameling voorbeelden en vraagstukken over uiteenlopende onderwerpen, die ik verder in paragraaf 3.8 zal bespreken. Deel 6 heeft wel weer een duidelijk onderwerp. Daar behandelt Van Ceulen een aantal vraagstukken die te maken hebben met in- en omgeschreven veelhoeken in cirkels (zie figuur 16):

> „Int tweede deel is gheleert, hoemen eenighe figuren in ende om de cirkels beschrijve sal. Hier sal ick u leeren hoemender in ofte omgeschreven gelijcksydige figuren, zijden, ende grootte vinden sal, ende eerst beginnen aanden 4houck, daer na aende 8, 16, 32 houck, om, ende in, den circkel geschreven. Item de lengde der linien te vinden in ghetallen, waer van de eene ghetrocken vant eynde des Diameters, de ander uyt den centro, soo lanck datse tsamen comen in een punt, welck alles in de hier ghetrocken figuer te sien is (...)" (Van Ceulen 1615a, p. 247).

In het eerste vraagstuk laat Van Ceulen zien hoe hij de zijden van ingeschreven 2^n-hoeken in een cirkel berekent, waarbij $n \geq 2$ (zie ook figuur



(a) Van Ceulens illustratie (b) Een verduidelijking

Figuur 16: Zijden van ingeschreven $2n$-hoeken(Van Ceulen 1615a, p. 248)

16(b)). Neem aan dat de cirkel diameter 2 en dus straal 1 heeft. De twee middellijnen DF en CE snijden elkaar loodrecht in het middelpunt O, zodat driehoek DOC rechthoekig is. De zijden OC en OD van deze driehoek zijn beide gelijk aan de straal, zodat zijde $DC = \sqrt{1^2 + 1^2} = \sqrt{2}$. Dit is tevens de zijde van het ingeschreven vierkant. De zijde JH van het omgeschreven vierkant is gelijk aan de diameter van de cirkel, zodat $JH = 2$. De zijde van een ingeschreven regelmatige achthoek is hiermee ook te berekenen. Bekijk namelijk het punt R op het midden van zijde CD, en bereken dan

$$OR = \sqrt{OD^2 - DR^2} = \sqrt{1^2 - (\frac{1}{2}\sqrt{2})^2} = \sqrt{\frac{1}{2}}.$$

Vervolgens is $SR = OS - OR = 1 - \sqrt{\frac{1}{2}}$, zodat

$$PQ = \sqrt{SR^2 + DR^2} = \sqrt{(1\frac{1}{2} - \sqrt{2} + \frac{1}{2})} = \sqrt{2 - \sqrt{2}}.$$

Van Ceulen presenteert hierna een methode om uit de zijde van een ingeschreven n-hoek de zijde van een $2n$-hoek te berekenen. Hiervoor gebruikt hij het complement van een zijde van de n-hoek, waarmee hij het volgende bedoelt. Bekijk in de figuur de zijde CF, dan is CD hiervan het complement, omdat de cirkelboog op CD de cirkelboog op CF precies aanvult tot een halve cirkel.

Van Ceulen vindt vervolgens de zijde van de $2n$-hoek door dit complement van de zijde van een n-hoek af te trekken van de diameter van de cirkel, en uit het resultaat de wortel te trekken. Aangezien CD het complement is van zijde CF, wordt de zijde van een achthoek dus $\sqrt{2 - \sqrt{2}}$, wat klopt met het voorgaande. Uitleg voor deze methode geeft Van Ceulen niet, hij verwijst hiervoor naar *Vanden Circkel* (meer over de berekeningen in *Vanden Circkel* is bijvoorbeeld te vinden in het artikel van Wepster (2008)).

De zijde van een omgeschreven n-hoek is te berekenen door de loodlijn uit het middelpunt op de zijde van de ingeschreven $(n-1)$-hoek te bekijken. Deze loodlijn (bijvoorbeeld OT in figuur 16(b)) is half zo lang als het complement van de zijde waar de loodlijn op staat. OT staat bijvoorbeeld op zijde PQ, en er geldt: $OT = \sqrt{OP^2 - (\frac{1}{2}PQ)^2}$. Het complement van OT is PU. Omdat driehoek QPU op de middellijn staat, is hoek QPU recht, en geldt dus: $PU = \sqrt{QU^2 - PQ^2}$. Maar OP is de straal en dus gelijk aan de helft van QU, zodat

$$OT = \sqrt{OP^2 - (\frac{1}{2}PQ)^2} = \sqrt{\frac{1}{4}QU^2 - \frac{1}{4}PQ^2} = \frac{1}{2}\sqrt{QU^2 - PQ^2} = \frac{1}{2}PU.$$

Kijk dan naar de driehoeken OPQ en OWX, die zijn gelijkvormig. De zijden PQ (zijde ingeschreven achthoek), OT (zojuist berekende loodlijn) en OS (straal) zijn bekend, en er geldt $OT : PQ = OS : WX$, vanwege de gelijkvormigheid. Hiermee is zijde WX van de omgeschreven achthoek te berekenen: $OT \cdot OS = PQ \cdot WX$ zodat $WX = \frac{OT \cdot OS}{PQ}$.

Verderop in deel 6 geeft Van Ceulen meer voorbeelden van berekeningen aan in- en omgeschreven veelhoeken in cirkels. Daarbij maakt hij een aantal keren gebruik van de 'regel Coss' die hij in de ondertitel van de *Fondamenten* aankondigde. Bij het rekenen met de 'regel Coss' wordt een symbool ingevuld voor een onbekende grootheid, zodat ermee gerekend kan worden tot de grootte ervan wel bekend is. Ook de 'tafelen sinuum' (sinustafels) uit de ondertitel komen hier terug.

Het hierboven besproken voorbeeld is verreweg het belangrijkste vraagstuk uit deel 6. Van Ceulen geeft er een algemene methode om de zijden van in- en omgeschreven regelmatige $2n$-hoeken met $n \geq 4$ te berekenen. Uitgaande van een ingeschreven n-hoek kan hij steeds de zijde van een ingeschreven $2n$-hoek berekenen, met als beginpunt de vierhoek waarvan de zijden bekend zijn als de diameter van de cirkel gegeven is. Vanuit een ingeschreven veelhoek kan ook de zijde van de omgeschreven veelhoek berekend worden, en zo zijn voor steeds grotere n de zijden van de in- en omgeschreven $2n$-hoek bekend.

In zijn werk *Vanden Circkel* berekent Van Ceulen de zijden van in- en omgeschreven regelmatige n-hoeken voor steeds grotere n. De omtrek van zulke n-hoeken nadert voor grotere n steeds nauwkeuriger naar de omtrek van de cirkel, en Van Ceulen gebruikt dit om de verhouding van de omtrek en de diameter (π) te benaderen.

In *Vanden Circkel* besteedt Van Ceulen veel aandacht aan het opstellen van de vergelijkingen om de zijden van de veelhoeken te vinden. Het oplossen van deze ingewikkelde vergelijkingen licht hij echter in het geheel niet toe (Wepster 2008, p. 7), maar hij belooft wel een boek waarin hij meer uitleg zal geven (zie ook paragraaf 1.4).

Het lijkt wellicht of de *Fondamenten* deze beloofde uitleg geeft. Het oplossen van de ingewikkelde vergelijkingen uit *Vanden Circkel* legt Van Ceulen hier echter niet uit, en hij verwijst juist vaak naar *Vanden Circkel* voor meer achtergrond. De *Fondamenten* is dus blijkbaar niet het beloofde boek uit *Vanden Circkel*.

Uiteindelijk verwijst Van Ceulen in de *Fondamenten* kort naar nog een ander boek waarin hij uiteen zal zetten hoe de zijde van een ingeschreven veelhoek berekend kan worden: „(...) mijn Cos-bouck daer ick de vindinge des Hooch-geleerden Adrianus Romanus sal stellen, daer door men can come tot de verghelijckinghe van alderhande zijden van figueren gelijcksijdich inden circkel beschreven (...)" (Van Ceulen 1615a, p. 269).

Blijkbaar is dit 'Cos-bouck' het werk waar Van Ceulen naar verwijst in *Vanden Circkel* wanneer hij aankondigt nog een boek met extra achtergronden te zullen publiceren. Volgens verschillende bronnen is dit werk echter nooit gepubliceerd, en er is geen manuscript van gevonden (Bosmans 1910, p. 22; Vorsterman van Oijen 1868, p. 18, zie ook paragraaf 1.2).

3.8 Overige vraagstukken

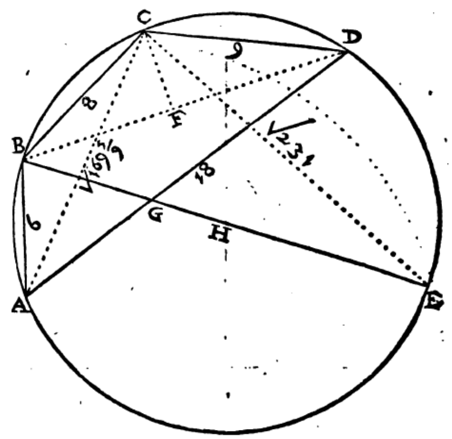
In de *Fondamenten* bespreekt Van Ceulen vooral veel voorbeelden. Op de rekenvoorbeelden in deel 1 na gaan ze allemaal over meetkundige problemen die al dan niet met getallen worden opgelost. Een groot onderwerp in de *Fondamenten* is de transformatie en deling van figuren (zie paragraaf 3.1). Deel 4 lijkt voornamelijk bedoeld om te oefenen met het berekenen van oppervlaktes en afmetingen van bijvoorbeeld stukken land (zie ook paragraaf 3.6). En deel 6 gaat in zijn geheel over veelhoeken in en om cirkels (zie paragraaf 3.7).

Het vijfde deel van de *Fondamenten* valt niet zo duidelijk onder een noemer als de andere delen. Omdat er toch noemenswaardige vraagstukken in staan zal ik er hier kort een voorbeeld uitlichten. Een onderwerp dat terugkomt in deel 5, is de deling van figuren zoals Van Ceulen dat eerder al in deel 3 behandelde (zie paragraaf 3.2). Een heel ander probleem is de constructie van een koordenvierhoek. Dat vraagstuk luidt als volgt: „Van dese hier ghetrocken vier linien gheteeckent met A B C D, wilmen maecken een vierhoek, sulcks soomen eenen Cirkel daer om treckt, dat de vier houcken raecken den omloop." (Van Ceulen 1615a, p. 203).

Wanneer vier lijnen gegeven zijn, is dus de vraag hiermee een koordenvierhoek te construeren. De oplossing van Van Ceulen is zeer rekenkundig: hij presenteert een lange berekening, om daarmee tot de lengte van een diagonaal van de vierhoek te komen. Als die eenmaal bekend is, is het eenvoudig de vierhoek te tekenen: de driehoek van 2 zijden en de diagonaal is nu bekend. De omgeschreven cirkel om die driehoek is dan ook bekend, en het vierde hoekpunt van de vierhoek moet op deze cirkel liggen. De lengte van de zijden zijn gegeven, zodat hiermee inderdaad de vierhoek gevonden kan worden.

Van Ceulen legt niet uit hoe hij dit doet, maar presenteert de volgende berekening:

- Neem aan dat de lijnstukken A en C tegenover elkaar staan, en B en D ook.
- Bereken $\frac{B}{D} + \frac{A}{C}$.



Figuur 17: Constructie van een koordenvierhoek (Van Ceulen 1615a, p. 204)

- Bereken $\frac{A}{C}\frac{B}{D}+1$.
- Vermenigvuldig de voorgaande resultaten: $(\frac{B}{D}+\frac{A}{C})\cdot(\frac{A}{C}\frac{B}{D}+1)$.
- Bereken $A \cdot C + B \cdot D$ en deel door het voorgaande en trek hieruit de wortel: $\sqrt{\frac{A \cdot C+B \cdot D}{(\frac{B}{D}+\frac{A}{C})\cdot(\frac{A}{C}\frac{B}{D}+1)}}$.
- Vermenigvuldig dit met de eerste uitkomst: $(\frac{B}{D}+\frac{A}{C})\sqrt{\frac{A \cdot C+B \cdot D}{(\frac{B}{D}+AC)\cdot(\frac{A}{C}\frac{B}{D}+1)}}$.

Van Ceulen geeft deze berekening niet zo algemeen, maar laat het met een getallenvoorbeeld zien:

- $A=6$, $B=8$, $C=9$, $D=18$.
- $\frac{B}{D}+\frac{A}{C}=\frac{4}{9}+\frac{2}{3}=1\frac{1}{9}$.
- $\frac{A}{C}\frac{B}{D}+1=\frac{6}{9}\frac{4}{9}+1=1\frac{8}{9}$.
- $(\frac{B}{D}+\frac{A}{C})\cdot(\frac{A}{C}\frac{B}{D}+1)=1\frac{1}{9}\cdot 1\frac{8}{9}=\frac{350}{243}$.
- $A \cdot C+B \cdot D=198$ en $\sqrt{\frac{A \cdot C+B \cdot D}{(\frac{B}{D}+\frac{A}{C})\cdot(\frac{A}{C}\frac{B}{D}+1)}}=\sqrt{\frac{198}{\frac{350}{243}}}=\sqrt{\frac{24077}{125}}$.
- $(\frac{B}{D}+\frac{A}{C})\sqrt{\frac{A \cdot C+B \cdot D}{(\frac{B}{D}+AC)\cdot(\frac{A}{C}\frac{B}{D}+1)}}=\sqrt{\frac{24077}{125}}\cdot 1\frac{1}{9}$.

Inderdaad kan hij zo de lengte van deze diagonaal berekenen. Omdat Van Ceulen in het gedeelte over rekenen met lijnstukken liet zien hoe hij elke lengte kan construeren op basis van een gegeven andere lengte, is het ook in dit vraagstuk mogelijk de oplossing daadwerkelijk te construeren. Daarna is ook de koordenvierhoek construeerbaar (zie figuur 17). In het volgende voorbeeld behandelt Van Ceulen hetzelfde probleem, maar geeft een oplossing in de vorm van een constructiemethode zonder het gebruik van getallen.

Dit vraagstuk werd hem toegestuurd door *Meester Iohan Pouwelsz*, zo zegt Van Ceulen zelf (Van Ceulen 1615a, p. 203). Veel van de vraagstukken in deel 5 lijken eveneens ingezonden vraagstukken; het eerste vraagstuk over de deling van figuren in dit deel werd bijvoorbeeld toegezonden door Simon Stevin (Van Ceulen 1615a, p. 212). De overige vraagstukken lopen wat betreft onderwerpen ver uiteen, en regelmatig verwijst Van Ceulen hier naar tijdgenoten die ook met zulke problemen bezig waren, of het hem expliciet hadden toegestuurd. Zie voor een lijst met voorkomende namen in de *Fondamenten* ook appendix A.

4 Interpretatie van het boek

Volgens Van Maanen (1987, p. 16) gebruikte de Leidse ingenieursschool deel 2 en 3 van de *Fondamenten* als lesmateriaal. Of Van Ceulen het speciaal hiervoor geschreven heeft is niet duidelijk (zie paragraaf 4.3), noch wat zijn bedoelingen waren met de overige delen van de *Fondamenten*.

De opbouw van de *Fondamenten* kan mogelijk inzicht verschaffen in de bedoelingen van Van Ceulen, terwijl de vertaling van Snellius diens visie erop etaleert. In dit hoofdstuk zal ik eerst aandacht besteden aan de plaats die het boek innam in de periode waarin het geschreven werd (paragraaf 4.1), waarna ik de opbouw en Snellius' interpretatie zal bestuderen (par. 4.2). Wat dit zegt over de bedoelingen die Van Ceulen kan hebben gehad met het boek zal ik tenslotte in paragraaf 4.3 bespreken.

4.1 Het boek in zijn tijd

Enkele typische problemen uit de 17$^{\text{e}}$ eeuwse wiskunde waren de deling van figuren, deling van hoeken, constructie van middelproportionalen, driehoeksproblemen en oppervlakte- en inhoudproblemen zoals de kwadratuur van de cirkel en de transformatie van figuren (Bos 2001, pp. 59-94).

De onderwerpen die Van Ceulen in de *Fondamenten* bespreekt, zijn voor een groot deel karakteristiek voor de wiskunde van die tijd. Zo bespreekt hij inderdaad de transformatie en deling van figuren (deel 3 en 5) en driehoeksproblemen en oppervlakte- en inhoudproblemen (deel 3 en 4). De constructie van middelproportionalen komt vaak terug in de oplossingen van de problemen, en ook de kwadratuur van de cirkel ontbreekt niet. Van Ceulen besteedt verder erg veel aandacht aan berekeningen aan in- en omgeschreven figuren in cirkels (deel 6). Natuurlijk ligt de verklaring hiervoor bij zijn eigen belangstelling voor de berekening van de verhouding tussen de omtrek en diameter van de cirkel (π), waarvoor deze cirkelfiguren nodig zijn.

Opvallend in het gehele boek, is Van Ceulens interesse in het gebruik van getallen voor meetkundige doeleinden. Het belang hiervan geeft Van Ceulen meteen in de inleiding van zijn eerste hoofdstuk aan:

> „Geometria, is een const, daer door alle grootten, beweeghlick ofte onbeweeghlijck connen gemeeten werden, daer nae (ghemeten sijnde) wert door de ghetallen geopenbaert, daerom is van nooden voor een meter de kennisse van ghetallen." (Van Ceulen 1615a, p. 1)

Het eerste deel van de *Fondamenten* is dan ook geheel gewijd aan rekenkunde. Een groot deel daarvan gaat over worteltrekken en irrationale getallen. Zoals

Bos zegt: „Van Ceulen zag de uitdaging van irrationale getallen" (Bos 2000, p. 260). Bij het vertalen van de *Fondamenten* was het juist dit gedeelte over wortels en irrationale getallen dat Snellius behield van het eerste deel over rekenkunde; de rest vertaalde hij in het geheel niet (zie paragraaf 4.2).

In de tijd dat Van Ceulen de *Fondamenten* schreef, begon het gebruik van irrationale getallen meer geaccepteerd te raken. En hoewel men er toen wel mee rekende, was het nog steeds een punt van discussie of men ze wel of niet als 'echte' getallen kon zien. (Kline 1972, p. 251). Van de tijdgenoten van Van Ceulen was bijvoorbeeld Stevin iemand die irrationale getallen wel als echte getallen zag, en ze benaderde met rationale getallen (Kline 1972, p. 252).

Van Ceulen zelf laat zich in de *Fondamenten* niet expliciet uit over de status van irrationale getallen. Hij legt uit hoe er mee gerekend kan worden, en doet dit vervolgens zonder discussie. Ook het gebruik van getallen voor meetkundige vraagstukken past Van Ceulen zonder discussie toe. Destijds was het voor verschillende toepassingen nodig om meer rekenkunde te introduceren; bijvoorbeeld bij technische toepassingen als architectuur en ballistiek. Zulke ontwikkelingen forceerden wiskundigen ertoe meer getalgericht te denken (Kline 1972, p. 250).

Dat Van Ceulen inderdaad getalgericht was, lijdt geen twijfel. Behalve zijn inleiding in het eerste hoofdstuk, waarin hij uitdrukt hoe belangrijk getallen zijn voor de meetkunde, voegt Van Ceulen een apart gedeelte toe aan het derde deel ('byvouch') waarin hij aankondigt een aantal proposities door middel van getallen te zullen bewijzen (zie paragraaf 3.5). De 'bewijzen' die Van Ceulen in dit gedeelte geeft, zijn geen complete bewijzen maar eerder getallenvoorbeelden waarmee hij laat zien dat de betreffende stelling voor een specifiek geval geldt.

Een tijdgenoot van Van Ceulen die hem voorging in dit getalgericht denken, was François Viète (1540 - 1603). Een typisch vraagstuk uit Viètes werk dat getallen en meetkunde combineert, luidt bijvoorbeeld als volgt: gegeven het oppervlak van een figuur en de verhoudingen van de zijden; vind de lengte van de zijden (Kline 1972, p. 279). Dit type problemen behandelt Van Ceulen veelvuldig in deel 4 van de *Fondamenten* (zie paragraaf 3.6).

Viète en Van Ceulen schreven bovendien beiden over rekenen met lijnstukken. In een gedeelte in deel 3 (Van Ceulen 1615a, pp. 132-139, zie ook paragraaf 3.3) zet Van Ceulen uiteen hoe hij lijnstukken bij elkaar optelt, van elkaar aftrekt, vermenigvuldigt en op elkaar deelt. Van Ceulen koppelt hier de rekenkundige bewerkingen aan meetkundige constructies, en representeert daartoe de lengte van een lijnstuk met een grootheid die losstaat van de meetkundige eigenschappen van een lijnstuk, zodat hij er apart mee kan rekenen (zie ook paragraaf 3.3).

Deze methode zorgde echter wel voor een complicatie wat betreft de dimensie: meetkundig gezien is het product van twee lijnstukken een rechthoek, maar Van Ceulen spreekt van het vinden van een *lijn* met de lengte gelijk aan het product: „(...) een linie te vinden, welcke ghetal het product ghelijck zij (...)" (Van Ceulen 1615a, p. 137). Snellius gaf hier in zijn vertaling van de *Fondamenten* flink commentaar op (zie ook paragraaf 3.3).

Viète zag net als Van Ceulen de lengte van een lijnstuk als iets dat losgekoppeld kon worden van het lijnstuk zelf, om er vervolgens mee te rekenen. Objecten van dimensies hoger dan drie benaderden Viète en Van Ceulen echter niet hetzelfde. Viète accepteerde het feit dat een vermenigvuldiging van twee lijnstukken een object van een hogere dimensie opleverde. Dat de dimensie van het resultaat hiermee hoger dan drie kon worden, vond hij echter niet bezwaarlijk. Hij ging er vanuit dat er na een lijn, een vlak en een driedimensionaal object ook hogere dimensies zouden bestaan (Bos 2001, p. 147).

Viète behandelt het rekenen met lijnstukken vooral theoretisch, terwijl Van Ceulen dieper in gaat op de constructiemethodes. Het is heel waarschijnlijk dat Van Ceulen op de hoogte was van Viètes werk, omdat hij hem op een aantal andere plaatsen in de *Fondamenten* aanhaalt (Van Ceulen 1615a, p. 143, p. 144, p. 164, p. 205).

4.2 De opbouw van de *Fondamenten* en Snellius' vertaling

De vraagstukken die Van Ceulen in de delen 3 tot en met 6 van de *Fondamenten* behandelt, zijn voor het grootste deel karakteristiek voor de periode waarin hij het boek schreef, zoals in de vorige paragraaf duidelijk werd. In deze paragraaf zal ik de verdeling van die vraagstukken over de laatste vier delen bespreken, maar ik begin met de theoretische basis die de delen 1 en 2 hiervoor leggen.

Van Ceulen verwijst in de *Fondamenten* nergens expliciet naar het eerste deel om de theorie die daar staat aan te halen. Het eerste deel is echter duidelijk bedoeld als ondersteuning voor de rest: Van Ceulen bespreekt hier de rekenkunde: de basisoperaties, het gebruik van getallen en het rekenen met bijvoorbeeld breuken en wortels (zie paragraaf 2.1). In zijn vertaling van de *Fondamenten* kortte Snellius juist dit eerste gedeelte flink in. Deel 1 neemt bij Snellius' vertaling slechts 31 pagina's in beslag, in plaats van 68 zoals bij Van Ceulen (Van Ceulen 1615b, pp. 1-31; Van Ceulen 1615a, pp. 1-68). Snellius slaat de eerste vijf hoofdstukken van dit deel over, en begint met de uitleg van worteltrekken. De definitie van cijfers en getallen, en de uitleg van de eenvoudige bewerkingen optellen, aftrekken, vermenigvuldigen en delen laat hij hiermee compleet achterwege. Ook de uitleg over rekenen met proporties en breuken komt in het geheel niet voor in Snellius' vertaling.

De volgende vier hoofdstukken van Snellius' vertaling gaan over respectievelijk het optellen, aftrekken, vermenigvuldigen en delen met wortels. De eerste vijf hoofdstukken van de vertaling nemen hiermee de inhoud van Van Ceulens zesde hoofdstuk voor hun rekening. Hoofdstuk VI van Snellius' vertaling heeft eenzelfde inhoud als die van hoofdstuk VII bij Van Ceulen: dit hoofdstuk bespreekt binomische en risidusche getallen: sommen van een natuurlijk getal en een wortel.

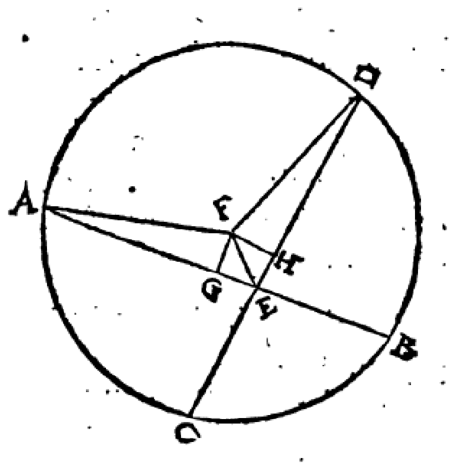
Hoofdstuk VII in Snellius' vertaling bespreekt dan wat er gebeurt als er uit zo'n binomisch of risidusch getal een wortel wordt getrokken. Bij Van Ceulen is dit geen apart hoofdstuk, maar een opmerking aan het eind van het zevende hoofdstuk over binomische en risidusche getallen. Deze opmerking is nodig voor het volgende hoofdstuk (zowel bij Van Ceulen als bij Snellius hoofdstuk VIII), waar juist zo'n wortel wordt getrokken om universale getallen te verkrijgen. Snellius besteedt hier iets meer aandacht aan dan Van Ceulen: 11 pagina's in plaats van 8.

In feite beperkt Snellius zich in zijn vertaling van het eerste deel van de *Fondamenten* tot worteltrekken, en de verschillende typen getallen die men met deze bewerking kan verkrijgen. Snellius schatte dit blijkbaar in als moeilijk onderwerp voor zijn lezers, terwijl hij de berekeningen met natuurlijke getallen en breuken gemakkelijk oversloeg. Van Ceulen besteedde echter juist veel aandacht aan het rekenen met breuken (zie ook paragraaf 2.1). Waarom Snellius en Van Ceulen zo van mening verschilden over het belang van de rekenkundige onderwerpen is niet duidelijk.

De rol van deel 2 als theorie voor de rest is wat explicieter; regelmatig verwijst Van Ceulen terug naar proposities uit dit deel. De proposities die ten grondslag liggen aan de voorbeelden over de transformatie en deling van figuren (deel 3) zijn bijvoorbeeld die over gelijkvormige figuren en verhoudingen van oppervlaktes. Ook de proposities over driehoeken en parallelle lijnen zijn voor dit onderwerp erg belangrijk, zoals bijvoorbeeld propositie 26, die Van Ceulen veelvuldig gebruikt:

> Prop. 26: „Alle Tryangels, ofte even-wijdighe viercanten, staende tusschen parallel Linien, op eenen ofte ghelijcken Basis, zijn malcander ghelijck: ende soo verre sulcke Figueren staen op onghelijcke Basis, zijn dan mede gheproportioneert als hare Basis." (Van Ceulen 1615a, p. 83)

Als basis voor het rekenen met lijnen (deel 3) gebruikt Van Ceulen vooral vaak de stelling van Pythagoras (propositie 23 in deel 2 van de *Fondamenten*), en een aantal proposities over cirkels en in- en omgeschreven figuren daarin.



Figuur 18: Illustratie bij propositie 50 (Van Ceulen 1615a, p. 94)

Propositie 50 is bijvoorbeeld cruciaal voor het vermenigvuldigen van twee lijnstukken (zie ook paragraaf 3.3 en figuur 18):

> Prop. 50: „Als twee linien malcander doorsnijden in eenen Circkel, dan zijn de recht-hoeckige viercanten der deelen, malcander ghelijck" (Van Ceulen 1615a, p. 94)

De driehoeks- en oppervlakteproblemen in de delen 3 en 4 gebruiken opnieuw veelvuldig de stelling van Pythagoras en de proposities over driehoeken en parallellogrammen tussen parallelle lijnen (zie bijvoorbeeld propositie 26). Ook eigenschappen van rechthoeken, cirkels en hoeken in cirkels zijn hier veel terug te zien, net als enkele proposities over in- en omgeschreven veelhoeken, verhoudingen en gelijkvormige figuren. Tenslotte zijn hier de equivalenten van de stelling van Pythagoras voor stomphoekige en scherphoekige driehoeken, die we tegenwoordig kennen als de cosinusregel, erg belangrijk (zie paragraaf 2.2).

Deze laatste twee proposities zijn ook belangrijk voor de voorbeelden in deel 5, evenals een aantal proposities over gelijkvormigheid en over eigenschappen van vierhoeken, cirkels en in- en omgeschreven figuren. Deel 6 bespreekt juist zulke in- en omgeschreven figuren, maar maakt daarvoor weinig gebruik van de proposities uit deel 2 hierover. Wel is opnieuw de stelling van Pythagoras erg belangrijk, en een propositie die gelijkvormige figuren koppelt aan hun oppervlak:

> Prop. 74: „Alle ghelijckformige figueren, tZij tryangels, 4,5,6,7,8,etc.

> hoecken, hebben proportie tegen malcander, als de quadraten van haer geproportioneerde zijden." (Van Ceulen 1615a, p. 106)

Het is niet zo dat Van Ceulen in de overige delen expliciet verwijst naar elke propositie uit deel 2. Kijkend naar het grotere geheel is de inhoud van de proposities in deel 2 echter wel exact de inhoud die nodig is voor de latere voorbeelden. Deze voorbeelden lijken hiermee wel de aanleiding te zijn geweest tot de gemaakte selectie van proposities.

In zijn vertaling nam Snellius het tweede deel van de *Fondamenten* helemaal over. In de verdere delen gaf hij regelmatig commentaar op Van Ceulens werkwijze, en wijzigde de indeling van het boek op sommige plaatsen. Van Ceulens versie bespreekt in de eerste twee delen theorie. Deel 4 is overduidelijk bedoeld als oefeningen en voorbeelden bij de voorgaande stof, deel 5 vooral als ingewikkelder voorbeelden en deel 6 heeft een duidelijke link met *Vanden Circkel* (zie ook paragraaf 3.7).

De rol van het derde deel van de *Fondamenten* is dubbel. Van Ceulen legt er de transformatie en deling van figuren uit, en geeft hierbij veel voorbeelden. Midden tussen de „Geometrische vragen, waer in eendeels het gebruyck der voor-gestelder Fondamenten geleert wert" (Van Ceulen 1615a, p. 139) staat echter ineens een belangrijke regel: de regel van Heron, voor het berekenen van het oppervlak van een driehoek (zie paragraaf 3.4). De plaats van deze regel van Heron doet die geen eer aan: het lijkt eerder een van de vele voorbeelden.

Dat deze regel niet tussen de meetkundige proposities in deel 2 van de *Fondamenten* kon staan, is logisch: alle proposities in deel 2 zijn „uyt Euclides getrocken" (Van Ceulen 1615a, p. 69), en de regel van Heron komt in Euclides' *Elementen* niet voor. Sterker nog, Euclides spreekt in het geheel niet over oppervlakteberekeningen (De Wreede 2007, p. 251). Dit zal de reden zijn geweest dat Van Ceulen de regel van Heron niet in deel 2 heeft willen plaatsen, maar hem een minder opvallende plaats heeft gegeven in deel 3.

In deel 3 bespreekt Van Ceulen verder het rekenen met lijnstukken en bewijzen met getallen. Zoals opgemerkt in paragraaf 3.5 bevat het gedeelte over 'bewijzen met getallen' ('byvouch' bij deel 3) geen echte bewijzen, maar vooral getallenvoorbeelden bij eerdere proposities en voorbeelden. De voorbeelden lijken meer een voorbereiding op de rekenvoorbeelden in het vierde deel van de *Fondamenten*. Er is dan ook wel wat voor te zeggen dat Snellius er voor koos het 'byvouch' bij deel 3 te verwijderen, en aan het begin van deel 4 te plaatsen.

Snellius maakte hiermee bovendien een tweedeling zodat pas in deel 4 voor het eerst rekenvoorbeelden bij meetkundige problemen voorkwamen. In plaats van een voorwoord aan het begin van het boek, plaatste Snellius aan het begin van deel 4 een 'voorwoord'. Door deze tweedeling wordt deel 3 duidelijker geprofileerd als theorie, en deel 4 juist als oefenopgaven.

De voorbeelden en vraagstukken in deel 5 van de *Fondamenten* lijken van een te hoog niveau om als oefenopgaven bedoeld te zijn. Bij verschillende vraagstukken in dit deel zegt Van Ceulen expliciet dat ze hem toegezonden zijn, zoals bijvoorbeeld het eerste vraagstuk: „Dese vrage heeft aen mijn ghesonden (...) eenen hervaren ende rechten Liefhebber deser const, ghenoemt *Meester Iohan Pouwelz.* (...)" (Van Ceulen 1615a, p. 203, zie ook paragraaf 3.8). Andere namen waar Van Ceulen naar verwijst zijn te vinden in appendix A.

Deel 5 lijkt dus voornamelijk bedoeld als een deel waarin Van Ceulen kan laten zien hoe bedreven hij is in het oplossen van problemen. Het is goed mogelijk dat dit deel oorspronkelijk niet bij de *Fondamenten* hoorde, maar na Van Ceulens dood is blijven liggen en in een moeite mee is gepubliceerd. Hetzelfde zou kunnen gelden voor deel 6: beide delen lijken zowel wat betreft onderwerp als wat betreft niveau niet overeen te komen met de delen 1 tot en met 4, die samen goed voor een leerboek door zouden kunnen gaan.

Het feit dat in deel 5 de deling van figuren nogmaals ter sprake komt, in plaats van dat alle vraagstukken over dit onderwerp gebundeld op dezelfde plaats staan, bevestigt nog eens het idee dat deel 5 oorspronkelijk niet bij de *Fondamenten* hoorde. Ook valt op dat Van Ceulen in deel 5 vooral naar proposities uit de *Elementen* van Euclides verwijst, terwijl hij in de eerdere delen meer naar zijn eigen deel 2 van de *Fondamenten* refereert. Toch staat in deel 5 minstens één verwijzing naar deel 2, namelijk bij het zestiende vraagstuk. Geheel los van de eerdere delen staat deel 5 dus niet.

4.3 De bedoeling van het boek

In de inleiding van dit hoofdstuk noemde ik al dat (een deel van) de *Fondamenten* mogelijk geschreven is met het oog op de ingenieursschool. Of dit inderdaad de reden is geweest, is moeilijk te achterhalen. In deze paragraaf zal ik enige aandacht besteden aan het moment waarop Van Ceulen de *Fondamenten* geschreven kan hebben, en zijn redenen hiervoor.

De *Fondamenten* werd in 1615 gepubliceerd, 15 jaar na de oprichting van de ingenieursschool. Van Ceulen moet het echter een aantal jaren eerder hebben geschreven, tenminste voor zijn dood in 1610. Volgens Vorsterman van Oijen (1868, p. 9) zou er zelfs een uitgave van de *Fondamenten* uit 1595 moeten bestaan. Maar hierin vergist hij zich, zo zegt Bierens de Haan. Immers, in *Vanden Circkel* verwijst Van Ceulen in het voorwoord naar een boek dat hij nog zal publiceren, en waarin hij verschillende zaken nog zal uitleggen (zie paragraaf 1.4). Bierens de Haan gaat er vanuit dat Van Ceulen hiermee de *Fondamenten* bedoelt, wat inderdaad uitsluit dat het boek al voor *Vanden Circkel* (1696) gepubliceerd zou zijn.

In paragraaf 1.4 bleek echter al dat het niet zo zeker is dat Van Ceulen in *Vanden Circkel* inderdaad doelt op de *Fondamenten*, zodat het dus best mogelijk is dat er in 1595 al een editie van gepubliceerd is. Ik vond echter geen enkele andere aanwijzing hiervoor dan die van Vorsterman van Oijen. Vorsterman van Oijen heeft het bovendien helemaal niet over een editie van de *Fondamenten* uit 1615, zodat hier eerder sprake lijkt van het verkeerd overnemen van het jaartal.

Het is dus onduidelijk wanneer Van Ceulen de *Fondamenten* precies schreef, en waarom. Het beloofde boek uit *Vanden Circkel* is het niet. En zoals in de vorige paragraaf bleek, zijn de laatste twee delen geen lesmateriaal, maar de eerste vier delen misschien wel.

In deel 3 van de *Fondamenten* bespreekt Van Ceulen de transformatie en deling van figuren. Dit werd ook aan de ingenieursschool gedoceerd, en volgens Van Maanen gebruikte men hiervoor een deel van de *Fondamenten*. Daarnaast was een van de onderwerpen aan de school ook een selectie uit de *Elementen* van Euclides (Van Maanen 1987, p. 16), waarvoor deel 2 van de *Fondamenten* misschien had kunnen dienen. Wel valt op (zie paragraaf 4.2) dat de proposities in deel 2 vrij expliciet als doel hebben de rest van de *Fondamenten* te ondersteunen.

Deel 2 volgt vrij letterlijk stukken uit de *Elementen* van Euclides, in die tijd een bekend boek (zie paragraaf 2.2). Wanneer deel 2 slechts als doel had de rest te ondersteunen, blijft de vraag waarom Van Ceulen niet gewoon kon verwijzen naar de *Elementen*. Van Ceulen is al erg inconsequent in zijn verwijzingen: regelmatig verwijst hij naar de verkeerde propositie. Dit kan er op wijzen dat Van Ceulen proposities toevoegde zodra hij ze in een vraagstuk nodig had, en daardoor bijvoorbeeld onjuist hernummerde.

Vaak verwijst Van Ceulen naar een propositie uit de *Elementen* terwijl diezelfde propositie ook in zijn eigen tweede deel aanwezig is. Soms verwijst hij ook zowel naar Euclides als naar zichzelf, waardoor de reden voor het toevoegen van deel 2 wegvalt.

Wanneer Van Ceulen de *Fondamenten* reeds voor 1606 schreef, is het echter goed te verklaren waarom hij zoveel van de *Elementen* vrij letterlijk overnam in zijn tweede deel. Voor dat jaartal was er namelijk in het geheel geen Nederlandse vertaling van de *Elementen*, pas in 1606 verscheen de vertaling van de hand van Jan Pietersz. Dou.

Een bevestiging dat deel 2 vooral bedoeld was voor de lezers die Euclides' *Elementen* in het Latijn niet konden lezen, ligt in het feit dat Snellius dit deel niet vertaalde in *De Circulo et adscriptis*. Dat boek was een Latijnse vertaling van stukken uit *Vanden Circkel* en de *Fondamenten*, waarbij Snellius van de laatste alleen deel 2 weg liet. Vreemd is echter dat Snellius het tweede deel nog wél vertaalde in zijn eerste Latijnse uitgave van de *Fondamenten*: de *Fundamenta*. Ook hier had hij kunnen verwijzen naar de bestaande Latijnse tekst van de *Elementen*.

De bedoeling van de overige delen van de *Fondamenten* is moeilijker vast te stellen. Zoals besproken in paragraaf 4.2 lijken de delen 1 tot en met 4 een coherent geheel te vormen, terwijl deel 5 en 6 wat afwijken wat betreft niveau en onderwerpen. Gezien de posthume publicatie van de *Fondamenten* is het goed mogelijk dat het een bundeling is van achtergebleven manuscripten. Toch is de *Fondamenten* meer dan alleen een verzameling werk van Van Ceulen. De delen 3 tot en met 6 verwijzen stuk voor stuk wel een keer naar een eerder resultaat, zodat er in elk geval enige samenhang is tussen de delen. Deel 1 en 2 bespreken de basistheorie uit de reken- en meetkunde, maar dit lijkt niet het belangrijkste onderdeel van het boek. Zoals in paragraaf 4.2 bleek, zijn deel 1 en 2 vooral ondersteuning voor de rest. Een leerboek dat veel theorie behandelt is het dus niet, maar de vraagstukken illustreren wel de belangrijke basisprincipes uit de reken- en meetkunde. Precies zoals de titel belooft.

Conclusie

Van Ceulen behandelt in de *Fondamenten* een groot aantal vraagstukken die representatief zijn voor de tijd waarin hij het boek schreef. Hij bespreekt bijvoorbeeld veel driehoeks- en oppervlakteproblemen, en de transformatie en deling van figuren (zie paragraaf 3.1 en 3.2). Van Ceulen heeft daarnaast een grote voorkeur voor het werken met getallen. Hij geeft een aantal 'bewijzen' van stellingen door middel van getallenvoorbeelden, en lost meetkundige vraagstukken op met rekenkundige methodes.

Ook werkt hij een methode uit om te rekenen met lijnstukken. Dit idee was niet geheel nieuw; ook Viète had zich hier reeds mee bezig gehouden (zie paragraaf 4.1). Van Ceulen werkt de constructie van het optellen, aftrekken, vermenigvuldigen en delen van lijnstukken verder uit dan Viète.

De delen 1 en 2 van de *Fondamenten* bespreken theorie, de overige delen vraagstukken en voorbeelden. De keuze voor de theorie lijkt exact afgestemd op de theorie die nodig is voor de vraagstukken (zie ook paragraaf 4.2): vooral het tweede deel van de *Fondamenten* gebruikt Van Ceulen expliciet als onderbouwing voor de rest.

Dit tweede deel van de *Fondamenten* is gebaseerd op de *Elementen* van Euclides. Als bron hiervoor gebruikte Van Ceulen de Duitse vertaling van de *Elementen* van Xylander (Wilhelm Holtzman, zie ook paragraaf 2.3). Vergelijking met deze bron verklaart een aantal afwijkingen en onjuistheden in Van Ceulens tekst.

In de delen 3 tot en met 6 behandelt Van Ceulen verschillende vraagstukken en voorbeelden. Deze gaan van een vrij elementair niveau in deel 3 tot een hoog niveau in deel 5 en 6. De eerste twee delen van de *Fondamenten* zijn vooral bedoeld als ondersteuning hiervoor, en de vraagstukken en voorbeelden in de laatste vier delen lijken dus het belangrijkste onderdeel van het boek.

Snellius interpreteerde het dan ook niet als leerboek: juist een groot deel van de theorie uit deel 1 liet hij weg in zijn vertaling, en in een latere uitgave (*De Circulo et adscriptis*) liet hij deel 2 helemaal weg.

De *Fondamenten* is dus niet als leerboek bedoeld, in ieder geval niet in Snellius' optiek. Wel gebruikte de Leidse ingenieursschool delen ervan als lesmateriaal. De *Fondamenten* is ook meer dan een bundeling van losse werken van Van Ceulen: de verschillende delen verwijzen allemaal wel eens naar een propositie uit deel 2. De beste karakterisering van de *Fondamenten* is dat het de basisprincipes uit de reken- en meetkunde behandelt met behulp van vraagstukken en voorbeelden.

Literatuur

- Bierens de Haan, D., 1878. VIII Ludolph van Ceulen. In: *Bouwstoffen voor de geschiedenis der wis- en natuurkundige wetenschappen in de Nederlanden.* Amsterdam, [z.n.], pp. 123-170.

- Bos, H.J.M., 2000. De cirkel gedeeld, de omtrek becijferd en pi gebeiteld: Ludolph van Ceulen en de uitdaging van de wiskunde. In: *Nieuw Archief voor Wiskunde*, nr 3, pp. 259-262.

- Bos, H.J.M., 2001. *Redefining Geometrical Exactness.* Springer-Verlag, New York.

- Bosmans, H., 1910. Un émule de Viète: Ludolphe van Ceulen. Analyse de son „Traité du cercle". In: *Annales de la Soc. Scient. de Bruxelles*, 34, pp. 88-139.

- Ceulen, L. van, 1596. *Vanden Circkel.* Jan Andriesz, Delft.

- Ceulen, L. van, 1615a. *De Arithmetische en Geometrische Fondamenten.* Ioost van Colster en Iacob Marcus, Leiden.

- Ceulen, L. van, 1615b, *Fundamenta Arithmetica et Geometrica.* Vertaling van Willebrord Snellius. Apud Iacobum Marcum Bibliopolam, Lugduni Batavorum.

- Euclides, 1956. *The thirteen books of Euclid's elements.* (Vertaald door en met commentaar van Thomas L. Heath), Dover Publications, New York.

- Hogendijk, J., 2006. Het rekenwonder van het Rapenburg. In: *Eureka* 3 nr. 12, Leiden, pp. 15-17.

- Holtzman, W., 1562. *Die sechs erste Bücher Euclidis.* Jakob Kundig, Basel.

- Kätscher, F., 1979. Einige Entdeckungen über die Geschichte der Zahl Pi sowie Leben und Werk von Christoffer Dybuad und Ludolph van Ceulen. In: *Mathematisch-Naturwissenschaftliche Klasse*, 116. Band, 7. Abhandlung. Springer, Wenen.

- Kline, M., 1972. *Mathematical thought from ancient to modern times.* Oxford University Press, New York.

- Maanen, J. van, 1987. *Facets of seventeenth century mathematics in the Netherlands*. Utrecht (proefschrift).

- Oomes, R.M.Th.E; Tersteeg, J.J.T.M.; Top, J., 2000. Het grafschrift van Ludolph van Ceulen. In: *Nieuw Archief voor Wiskunde*, nr. 2, pp. 57-62).

- Oomes, R.M.Th.E., 2000. *Pi in de bibliotheek*. Universiteitsbibliotheek Leiden, Leiden.

- Reich, K., 2003. Die Rezeption Diophants im 16. Jahrhundert. In: *N.T.M.*, 11, pp. 80-89.

- Vorsterman van Oijen, M.G.A., 1868. Notice sur Ludophe van Colen. In: *Bulletino di bibliografia e di storia delle scienze matematiche e fisiche*, 1, pp. 1-18.

- Wepster, S., 2008. Van Ceulens Veelhoeken en Veeltermen. Nog te verschijnen in *De Nieuwe Wiskrant*.

- Wreede, L. de, 2007. *Willebrord Snellius (1580-1626) a Humanist Reshaping the Mathematical Sciences*. Utrecht (proefschrift).

Appendix A: namenlijst

Appendix B: proposities bij Van Ceulen en Euclides

Notatie: III, 2 = Boek 3 propositie 2. Proposities met een * komen niet exact overeen met de genoemde propositie, maar zijn een specifiek geval of juist een generalisatie hiervan. Sommige proposities zijn een gevolg van een andere propositie, dit geef ik aan met 'volgt uit ...'

Fond.	Elementen	Fond.	Elementen	Fond.	Elementen
1	I, 1	29		57	IV, 6, 7
2	I, 4	30		58	IV, 11
3	I, 5	31		59	IV, 12
4	I, 6	32	II, 2	60	IV, 15
5	I, 9	33	II, 4	61	VI, 3
6	I, 10	34	II, 5	62	VI, 4, 5
7	I, 11	35	II, 6	63	VI, 8
8	I, 12	36	II, 11	64	VI, 13
9	I, 15	37	II, 14	65	omgekeerde van 64
10	volgt uit 9	38	II, 15	66	VI, 9
11	I, 22	39	III, 17	67	VI, 10
12	I, 23	40	III, 20	68	VI, 11
13	I, 27	41	III, 21	69	VI, 12
14	I, 28	42	III, 22	70	VI, 12
15	I, 29	43	III, 26	71	VI, 14
16	I, 30	44	III, 1, 3*	72	VI, 15
17	I, 31	45	III, 30	73	VI, 18
18	I, 32*	46	III, 31	74	VI, 19*
19	I, 18	47	III, 32	75	volgt uit 74
20	I, 32*	48	III, 33	76	VI, 23
21	I, 33	49	III, 34	77	VI, 24
22	I, 46	50	III, 35	78	VI, 25
23	I, 47	51	III, 36	79	VI, 31
24	I, 37, 38, 41[a]	52	volgt uit 51	80	I, 42
25	I, 35	53	IV, 2	81	volgt uit 77
26	I, 37, 38, VI, 1	54	IV, 3	82	I, 44
27	VI, 2	55	IV, 4	83	II, 12
28		56	IV, 5	84	II, 13

[a] Van Ceulen verwijst hier zelf naar 41

Appendix C: inhoudsopgave bij de *Fondamenten*

p55	Binomium, Risiduum. Optellen daarvan.
p56	Vermenigvuldigen met een bewijs.
p57	Delen.
p59	Worteltrekken.
Hoofdstuk 8 p60	Universale getallen.
DEEL 2 Definities	
p69	1. Punt 2. Lijn 3. Rechte lijn 4. Vlakke figuur 5. Kromme vlakken 6. Evenwinkel (hoek) 7. Rechtlijnige hoek
p70	8. Rechte hoek 9. Loodrecht 10. Stompe hoek 11. Scherpe hoek 12. Einde 13. Figuur 14. Cirkel 15. Middelpunt 16. Diameter 17. Halve cirkel 18. Stuk van cirkel 19. Rechtlijnige figuren
p71.	20-22. Definitie veelhoeken: Driehoeken (20), Vierhoeken, (21), Veelhoeken (22) 23-28. Eigenschappen van driehoeken: Gelijkzijdige driehoeken (23), Gelijkbenige driehoeken (24), Ongelijkzijdige driehoeken (25), Rechthoekige driehoeken (26), Stomphoekige driehoeken (27), Scherphoekige driehoek (28) 29-32. Eigenschappen van vierhoeken: Vierkant (quadraat, 29), Langwerpige vierhoek (30, gelijkwijdig is nog niet gedefinieerd!), Rombus (ruit, 31), Romboides (parallellogram, 32)

	33. Parallelle lijnen
‘Ghemeene bekentenissen’	
p72.	1. Gelijkheid: dingen die aan hetzelfde gelijk zijn, zijn ook aan elkaar gelijk
	2-7. Optellen, aftrekken, etc. van gelijke of ongelijke dingen
	8. Geheel is groter dan deel
	9. Rechte hoeken zijn aan elkaar gelijk
	10. Lijnen die een andere snijden met binnenste hoeken samen kleiner dan 180 graden dan snijden ze elkaar uiteindelijk
	11-12. Rechte lijnen besluiten geen figuur, kromme wel
Proposities	
p73	1. Op gegeven lijn gelijkzijdige driehoek te maken
	2. Twee driehoeken met twee gelijke zijden, en de ingesloten hoeken gelijk, dan zijn alle zijden en hoeken gelijk.
p74	3. Gelijkbenige driehoek heeft gelijke basishoeken, en als de zijden doorgetrokken worden zijn ook de hoeken onder de driehoek aan elkaar gelijk.
	4. Hieruit volgt: driehoek met twee gelijke hoeken heeft twee gelijke zijden, namelijk die boven deze gelijke hoeken.
	5. Bissectrice hoek
	6. Tweedeling lijn
p75	7. Loodlijn tekenen op gegeven lijn in gegeven punt.
	8. Vanuit gegeven punt boven lijn loodlijn tekenen op die lijn
	9. Als twee lijnen elkaar snijden zijn de overstaande hoeken gelijk
	10. (9) geldt ook voor meer dan 2 snijdende lijnen
p76	11. Drie lijnen waarvan twee samen langer zijn dan 1 andere, kunnen altijd een driehoek vormen.
	12. Op een gegeven lijn in een gegeven punt een hoek maken, gelijk aan gegeven hoek.
	13. Als een lijn twee andere lijnen snijdt, en de ingesloten en uitwendige hoeken zijn gelijk, dan zijn de twee lijnen parallel
p77	14. (vervolg op 13) als de hoeken gelijk zijn of allebei 90 graden, zijn de lijnen parallel of gelijkwijdig.
	15. Dus als een lijn twee parallelle lijnen snijdt, zijn hoeken gelijk

	16. Lijnen die parallel zijn aan een lijn, zijn ook parallel aan elkaar
	17. Gegeven een lijn en een punt erboven, hoe door dat punt een parallelle lijn trekken.
p78	18. Als een zijde van een driehoek doorgetrokken wordt, is de buitenste hoek groter dan een van beide hoeken ertegenover in de driehoek.
p79	19. De langste zijde van een driehoek staat steeds tegenover de grootste hoek.
	20. Als een zijde van een driehoek doorgetrokken wordt, is de buitenste hoek gelijk aan de som van de twee hoeken er tegenover in de driehoek. Bovendien zijn de drie hoeken in een driehoek samen 180 graden.
	21. In een figuur met twee gelijke parallelle lijnen tegenover elkaar, moeten de andere lijnen tegenover elkaar ook gelijk en parallel zijn.
p80	22. Op een gegeven lijn een vierkant construeren.
	23. Stelling van Pythagoras.
p81	24. Driehoeken tussen twee parallelle lijnen in en een gelijke basis op een van die lijnen, hebben een oppervlak gelijk aan de helft van de vierhoek op die basis tussen de parallelle lijnen.
p82	25. Diagonaal deelt parallellogram in twee gelijke delen, en overstaande hoeken zijn steeds gelijk.
p83	26. Driehoeken tussen parallelle lijnen (met gelijke hoogte dus) en gelijke basis zijn gelijk. Met verschillende basis zijn ze proportioneel met hun basis.
	27. Een lijn in een driehoek getrokken parallel aan een van de zijden, deelt de andere twee zijden proportioneel. Andersom: lijn die twee zijden proportioneel deelt is parallel aan derde zijde
p84	28. Rechthoek met oppervlak gelijk aan gegeven rechthoek construeren
	29. Rechthoek construeren met oppervlak gelijk aan ongeschikte vierhoek (zonder rechte hoeken)
p85	30-31. Rechthoek construeren met opp. gelijk aan ongeschikte vijfhoek (30) resp. veelhoek (31)

32. Lijn opgedeeld in stukken: rechthoeken van die stukken en de lijn zelf zijn even groot als vierkant van die lijn met zichzelf.

p86 33. Lijn in twee stukken gedeeld: vierkanten van de twee stukken plus twee rechthoeken van de twee verschillende stukken zijn samen het gehele vierkant van de hele lijn.

34. Lijn in twee gelijke en twee ongelijke stukken gedeeld: rechthoek van de twee ongelijke delen en het vierkant van het verschil tussen de halve lijn en het grootste deel samen gelijk aan het vierkant van de halve lijn.

p87 35. Lijn in twee gelijke stukken en verlengstuk eraan: rechthoek lijn+verlenging met verlengstuk plus vierkant halve lijn is gelijk aan vierkant halve lijn+verlenging.

36. Een lijn zo delen dat het de rechthoek van de hele lijn en het kleinste deel gelijk is aan het kwadraat van het grootste deel.

p88 37. Een vierkant construeren met oppervlak gelijk aan een gegeven figuur.

38. Een vierkant construeren dat in oppervlak gelijk is aan een aantal andere vierkanten samen.

p89 39. Vanuit een gegeven punt een raaklijn aan een cirkel trekken

40. Als op een koorde in een cirkel een driehoek getekend wordt met het overstaande hoekpunt op het middelpunt van de cirkel, is deze hoek twee keer zo groot als in de driehoek op die koorde met de overstaande hoek op de omtrek van de cirkel.

p90 41. Alle hoeken op dezelfde koorde en op de omtrek van de cirkel zijn gelijk.

42. Een vierhoek op een cirkel heeft overstaande hoeken samen steeds 180 graden

p91 43. In gelijke cirkels staan gelijke hoeken steeds op gelijke koorden. De hoek staat dan ofwel op de omtrek of in het middelpunt.

44. Een middelloodlijn op een koorde gaat altijd door het middelpunt.

45. Een cirkelboog in twee gelijke stukken delen.
46. Een driehoek met middellijn als basis en tophoek op omtrek, heeft rechte tophoek. Als de driehoek een basis minder dan de middellijn heeft is de tophoek groter, en basis groter dan de middellijn tophoek kleiner. De overstaande hoeken worden juist kleiner resp. groter.

p92 47. Gegeven een raaklijn aan een cirkel. Als vanuit het raakpunt een lijn getrokken wordt die de cirkel snijdt, is de hoek van deze lijn gelijk aan de hoek op de doorsnijdende lijn in het andere gedeelte van de cirkel.

p93 48. Op een lijnstuk een cirkelboog maken die een hoek op de lijn maakt gelijk aan gegeven hoek.
49. Stuk van een cirkel snijden, zodat de hoek die daarin staat gelijk is aan gegeven hoek.

p94 50. Als twee lijnen elkaar snijden in een cirkel, dan zijn de rechthoeken van de delen aan elkaar gelijk.
51. Als uit een punt buiten de cirkel twee lijnen getrokken worden, waarvan de een de cirkel raakt en de ander die snijdt, dan is de vierhoek van de lengte vd snijdende lijn en de breedte van het stuk van het punt tot de cirkel, gelijk aan het vierkant van de rakende lijn.

p95 52. Alle snijdende lijnen vanuit hetzelfde punt buiten de cirkel hebben dus gelijke rechthoeken met de lijn in de cirkel en het stuk tot aan de cirkel.

Definities in- en omgeschreven figuren: Een rechtlijnige figuur is in een rechtlijnige figuur ingeschreven als alle hoeken van het binnenste figuur alle zijden van het buitenste figuur raken.
Een rechtlijnige figuur wordt om een andere geschreven als alle zijden van de buitenste alle hoeken van de binnenste raken (als die evenveel zijden hebben)
Een rechtlijnige figuur wordt om een cirkel geschreven als alle zijden de omtrek raken
Een rechtlijnige figuur wordt in een cirkel geschreven, als alle hoeken de omtrek raken
Een rechte lijn wordt in een cirkel geschreven, als de einden de omtrek raken.

p96 53. Een driehoek in een cirkel schrijven, met hoeken gelijk aan een gegeven driehoek 54. Een driehoek om een cirkel schrijven, gelijkvormig aan een gegeven driehoek.

p97 55. Een cirkel in een driehoek schrijven.

56. Een cirkel om een driehoek schrijven.

p98 57. Een vierkant in en om een driehoek schrijven.

58. Een gelijkzijdige vijfhoek in een cirkel schrijven.

p99 59. Een gelijkzijdige vijfhoek om een cirkel schrijven.

60. Een gelijkzijdige zeshoek in een cirkel schrijven.

p100 61. Een bissectrice deelt de overstaande zijde van een driehoek in de verhouding die de andere twee zijden tot elkaar hebben.

62. Driehoeken met gelijke hoeken hebben gelijke proporties.

p101 63. Loodlijn uit de rechte hoek van een rechthoekige driehoek deelt de driehoek op in twee driehoeken die gelijkvormig zijn met de eerste, en middelproportioneel (zodat A:B=B:C).

64. Voor twee gegeven lijnen een middelproportionele lijn vinden, zodat de eerste staat tot gevraagde als gevraagde tot de tweede.

p102 65. Lijn delen zo dat de helft ervan in t midden der reden (gulden snede)

66. Een lijn delen in een gevraagd aantal stukken

67. Een lijn delen in dezelfde proporties als een ander gedeelde lijn

p103 68. Gegeven twee lijnen, een derde vinden met zelfde verhouding tot 2e als 2e tot 1e.

69. Gegeven drie lijnen, een vierde in gelijke proportie vinden.

p104 70. Gegeven drie lijnen, een vierde vinden zodat die staat tot de 3e, als de 2e tot de 1e.

71. Rechthoeken met dezelfde oppervlakte hebben de zijden verkeerd geproportioneerd. Als ze verkeerd geproportioneerd zijn ook de oppervlakten gelijk. En gelijke vierhoeken met scherpe of stompe hoeken hebben bij gelijke hoeken verkeerd geproportioneerde zijden.

p105	72. Gelijke driehoeken met een gelijke hoek hebben overstaande zijde verkeerd geproportioneerd. En gelijke hoek en verkeerd geproportioneerd zijn gelijk.
p106	73. Op gegeven lijn een figuur maken dat gelijkvormig is met gegeven figuur.
	74. Alle gelijkvormige figuren hebben proportie gelijk aan de kwadraten van de zijden.
p107	75. Drie lijnen proportioneel met verhouding van eerste tot de derde gelijk aan die van een figuur op de eerst tot die van een figuur op de derde, dan zijn de figuren gelijkvormig.
p108	76. Parallellogrammen met gelijke hoeken hebben dezelfde verhouding tot elkaar als de zijden.
	77. Alle vierhoeken met parallelle zijden waar de diagonaal van een vierhoek doorheen gaat, zijn gelijkvormig aan elkaar en aan de grote vierhoek.
p109	78. Een rechtlijnige figuur maken (oppervlakte) gelijk aan gegeven figuur en gelijkvormig aan andere.
	79. Op de drie zijden van een rechthoekige driehoek drie figuren (ook kromlijnig!), dan is het oppervlak die op de schuine zijde gelijk aan de oppervlaktes van de andere twee samen.
p110	80. Een parallellogram maken op een gegeven hoek, met oppervlak gelijk aan gegeven driehoek.
p111	81. In alle parallellogrammen tussen twee parallelle lijnen zijn de figuren die de diagonalen raken steeds gelijk.
	82. Op een gegeven lijn met een gegeven hoek een parallellogram maken met oppervlak gelijk aan een ander rechtlijnig figuur.
p112	83. In een stomphoekige driehoek is het kwadraat van de zijde tegenover de stompe hoek groter dan de kwadraten van de andere zijden samen.
p113	84. In een scherphoekige driehoek is het kwadraat van de zijde tegenover de scherpe hoek kleiner dan de kwadraten van de andere zijden samen.
DEEL 3	
p115	Transformatie van figuren.
p 119	Deling van figuren.