Vierhonderd jaar wiskunde tot nut ende vermaak

Ludolph van Ceulen's opgaven afgezet tegen hun oplossing door Laurens Praalder

Student	Meike Rouwenhorst (0316245)
Scriptie begeleider	Steven Wepster
Instelling	Universiteit Utrecht
Voor de master	Science Teacher Education
Afgerond	voorjaar 2010

Voorwoord

Al snel was het zeker voor mij dat ik een onderwerp voor mijn halfjaarsscriptie wilde in de geschiedenis van de wiskunde. Jan Hogendijk raadde mij aan om eens te kijken naar de honderd opgaven die Ludolph van Ceulen stelde in zijn boek *Vanden Circkel*. Het zijn honderd opgaven van meestal nog geen drie regels lang. De opgaven beslaan verschillende vakgebieden binnen de wiskunde, namelijk meetkunde, algebra en numerieke wiskunde.
Al snel werd het duidelijk dat de uitwerkingen van de eerste zeventig opgaven door Laurens Praalder veel opheldering konden geven. Echter riep het werk van Praalder ook nieuwe vragen op. Ergens in november 2008 formuleerden mijn scriptiebegeleider, Steven Wepster, en ik voor het eerst een onderzoeksvraag welke de twee werken omvatte, zoals u zult lezen in de inleiding. Echter moest de scriptie eigenlijk af zijn begin februari, dat was de ingangseis voor het tweede jaar van de master Science Teacher Education. Het zou erom gaan spannen of ik dat zou gaan redden.

Het is erg lang onzeker gebleven of ik mocht gaan stage lopen als docente wiskunde op een middelbare school, zolang ik deze scriptie nog niet af had. Zelfs toen ik al een paar dagen op de stageschool (de Werkplaats te Bilthoven) geweest was, had ik slechts een voorwaardelijke toelating gekregen. Dat leverde me allemaal veel stress op. De dag dat ik te horen kreeg dat ik onvoorwaardelijk toegelaten werd, voelde ik een last van mijn schouders vallen. Maar pas een aantal dagen later, na afloop van de dansvoorstelling 2009 door leerlingen van de Werkplaats, voelde ik iets wat me erg gelukkig maakte. Ik heb geprobeerd dat hieronder te beschrijven.

Omdat ik vermoed dat ik vanavond nog een keer honger ga krijgen en zin heb in iets met veel snelle suikers, koop ik een muffin met dubbel veel chocola. Ik besluit hem op een stationsbankje, in alle rust, op te eten. Mijn oog valt op het grote scherm waarop nieuwsitems voorbij komen met bewegende beelden. Later valt ook mijn oog op enkele personen die staan te kijken. Het is een lust voor het oog om te zien hoe deze mensen zich bewegen (vrijwel niet) en welke afstanden zij tot elkaar behouden (sommigen bijna schouder aan schouder, anderen bijna op roosterpunten van een niet zichbaar rooster). Op een gegeven moment staan er vijf heren, al babbelend, vrijwel geheel om een vrij kleine vrouw heen die gebiologeerd blijft staan kijken naar het scherm. Want er zijn ook veel mensen die ofwel met elkaar aan het babbelen zijn, of verdwaasd om zich heen kijken, of ergens tegenaan leunend een krantje lezen...
Voldaan van mijn heerlijke muffin, opgewarmd bij het aanzicht van de intrigerende mensen, loop ik richting mijn fiets. Bij de uitgang staat een zwerver

op zijn vier-snarige gitaar te broddelen, hij vraagt of ik een muntje voor hem heb. Ik kan het niet laten, niet nu ik de wereld even zo mooi vind. Ik geef hem een euro, hij bedankt me uitvoerig. Even weet ik hoe het voelt als dichterlijke personen beschrijven hoe hun hart oplicht of uit de borstkas springt. Dit gevoel duurt maar heel kort, want als ik de kou in loop herinner ik me weer hoe veel werk er op me ligt te wachten, stageverslagen schrijven, laatste hand leggen aan deze scriptie en nog veel meer. Door deze ervaring krijg ik weer het gevoel dat ik alles aan kan, een gevoel dat ik meerdere keren verloor tijdens het schrijven van deze scriptie.

Inhoudsopgave

Inleiding

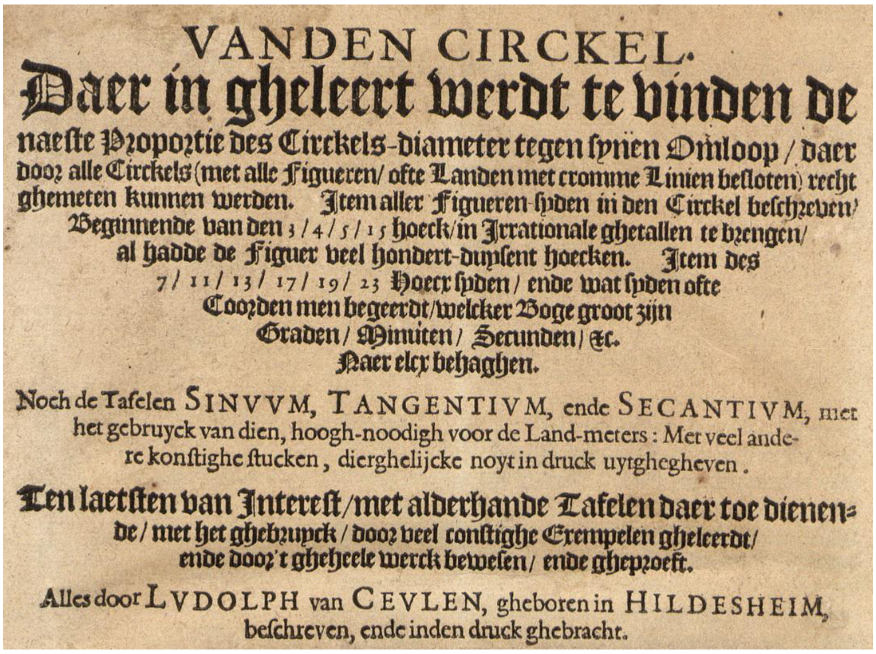
Voor de master Science Teacher Education aan de Universiteit Utrecht waarmee een eerstegraads docentschap behaald kan worden, moet een scriptie geschreven worden. De honderd opgaven van Ludolf van Ceulen in zijn boek *Vanden Circkel* hebben als aanleiding gediend voor deze scriptie.
Van Ceulen legde in zijn boek *Vanden Circkel* in 1596 aan zijn lezers honderd wiskundeproblemen voor. Ongeveer tweehonderd jaar later, in 1771 publiceerde Laurens Praalder uitwerkingen van de opgaven. Wederom grofweg tweehonderd jaar later, zou ik graag kijken naar de honderd opgaven.

Bij het bestuderen van bovengenoemde werken rezen enkele vragen, waarop in deze scriptie wordt getracht antwoord te geven. Wat was het doel van Praalder om de eerste zeventig oplossingen van de honderd opgaven te publiceren op tweehonderd jaar oude vraagstukken? Wat was zijn doelgroep en wat was de doelgroep van Van Ceulen? Beantwoordde Praalder de vraagstukken zoals Van Ceulen dat bedoeld heeft? Wat is de reden dat de laatste dertig opgaven niet opgelost werden door Praalder? Hoe dacht Praalder over Van Ceulen en zijn tijdgenoten?

In de zoektocht naar antwoorden op bovengenoemde vragen, ben ik begonnen met het oplossen van de opgaven. Daarbij bemerkte ik dat Van Ceulen veel kennis had over stellingen van de oude Grieken. De opmerkingen, antwoorden en hints welke Van Ceulen bij zijn opgaven gaf, leverden veel aanknopingspunten om te kunnen beantwoorden of Praalder de opgaven zo oploste als Van Ceulen voor ogen moet hebben gehad. Ook hoe Praalder omging met deze hints en antwoorden, leverde veel inzichten op.

Het werk van Praalder heeft geen inleiding. Het doel en de doelgroep welke Praalder voor ogen had, moet dus op een andere manier achterhaald worden. Door bestudering van het werk *Oeffenschool der Mathetmatische Weetenschappen* werden enkele zaken opgehelderd rondom het werk van Praalder.

De titels van de boeken van Van Ceulen en Praalder zijn vrij lang; langer dan tegenwoordig gebruikelijk is. Het is lange tijd gewoonte geweest om in de ondertitel te beschrijven wat er in het boek geschreven staat. De volledige titel van *Vanden Circkel* staat afgebeeld in figuur 1. Van het werk van Praalder zijn drie drukken verschenen, te weten in de jaren 1771, 1777 en 1790. Allemaal met een andere titel maar gelijke inhoud. De druk van 1771 was onderdeel van



VANDEN CIRCKEL.
Daer in gheleert werdt te vinden de
naeste Proportie des Circkels-diameter tegen synen Omloop / daer
door alle Circkels (met alle Figueren/ ofte Landen met cromme Linien besloten) recht
ghemeten kunnen werden. Item aller Figueren-syden in den Circkel beschreven/
Beginnende van den 3/4/5/15 hoeck/in Irrationale ghetallen te brengen/
al hadde de Figuer veel hondert-duysent hoecken. Item des
7/11/13/17/19/23 Hoeck-syden / ende wat syden ofte
Coorden men begeerdt/welcker Boge groot zijn
Graden / Minuten / Secunden / &c.
Naer elcx behaghen.
Noch de Tafelen SINVVM, TANGENTIVM, ende SECANTIVM, met
het gebruyck van dien, hoogh-noodigh voor de Land-meters: Met veel ande-
re konstighe stucken, dierghelijcke noyt in druck uytghegheven.
Ten laetsten van Interest/met alderhande Tafelen daer toe dienen-
de/ met het ghebruyck / door veel constighe Exempelen gheleerdt/
ende door 't gheheele werck bewesen/ ende gheproeft.
Alles door LVDOLPH van CEVLEN, gheboren in HILDESHEIM,
beschreven, ende inden druck ghebracht.

Figuur 1: Volledige titel van *Vanden Circkel*

een seriewerk met de naam *Oeffenschool der Mathematische Weetenschappen* (waarover meer in paragraaf 1.2.2). Voor deze scriptie is de druk uit 1790 bekeken, daarom zal naar het werk van Praalder verwezen worden met de titel *Ludolf van Keulen's voorstellen opgelost*. De voluit geschreven titel van dit werk luidt: *Ludolf van Keulen's mathematische voorstellen, bekend onder den tytel van kunstige vragen zonder ontbindingen, opgelost en verrykt met aanmerkingen en uitbreidingen, door Laurens Praalder, leraar in de wiskunde te Utrecht. Met Plaaten.*

Er is gekozen om passages uit de werken van Van Ceulen en Praalder voluit te citeren om de volgende redenen. De originele teksten geven veel informatie, maar zijn moeilijk letterlijk te vertalen. De originele teksten roepen een bijzondere sfeer op en geven mogelijk meer gevoel voor de historische context.
Het werk van Van Ceulen werd gedrukt in het Gotische schrift, dat was de standaard in die tijd. Praalder drukte zijn boeken in Latijnse schrift. Bij het schrijven van deze scriptie zijn delen van passages uit *Vanden Circkel* cursief gedrukt als de tekst in het originele werk in het Latijnse schrift gedrukt staan. Cursief gedrukte woorden in passages van Praalder zijn in het origineel ook cursief gedrukt.
In deze scriptie is getracht om lange titels in te korten zonder verlies van herkenbaarheid.

Hoofdstuk 1

De wiskundigen

In deze scriptie staan de opgaven in het tweeëntwintigste hoofdstuk van het boek *Vanden Circkel* van Van Ceulen[1] centraal. Evenals de oplossingen op de eerste zeventig opgaven in *L. van Keulen's voorstellen opgelost* van Praalder.[2] Alvorens een nadere blik te werpen op de inhoud van de werken, worden in dit hoofdstuk de levens van de wiskundigen Van Ceulen en Praalder bekeken. In de subparagrafen 1.1.1 en 1.2.1 vindt u meer over de bestudeerde boeken. Ten slotte in paragraaf 1.2.2 informatie over het medium waarin het werk van Praalder voor het eerst verscheen, *Oeffenschool der Mathematische Weetenschappen.*

1.1 Van Ceulen

Ludolph van Ceulen werd op 28 januari 1540[3] in Hildesheim geboren, een stad in Nedersaksen. Hij was zoon van Gerardus von Ceulen en Hestera de Roode, zijn vader was koopman en zijn moeder een vrouw uit een familie van aanzien. Van Collen en Van Colen werden ook als achternaam gebruikt door Van Ceulen. Ondanks dat er veel bronnen zijn die het tegendeel beweren, is het zeer onwaarschijnlijk dat de naam Van Ceulen een latinisering is van Ackermann, omdat het tussenvoegsel 'van' dan niet verklaard kan worden. Bovendien kan uit het Schossregister, bestand 50 uit het jaar 1539 welke zich in het stadsarchief van de stad Hildesheim bevind, geconcludeerd worden dat zijn vader ook de naam Van Ceulen droeg.[4]

Toen Gerardus von Ceulen overleed, vertrok Ludolph van Ceulen naar zijn broer in Antwerpen. Meursius beweert dat Van Ceulen alvorens naar Antwerpen te gaan eerst naar Lijfland (Estland) vertrok.[5], hier is echter geen bewijs voor. Vervolgens ging hij naar Delft waar hij meetkunde en rekenkunde bedreef en daar ook privéles in gaf. Na het overlijden van zijn eerste vrouw Mariken

[1] [Ceulen, 1596]
[2] [Praalder, 1790]
[3] Sommige bronnen geven het geboortejaar 1539, echter stond op zijn grafsteen het geboortejaar 1540, daarom houden wij dat hier aan [Katscher, 1979, p. 99]
[4] [Katscher, 1979, p. 98]
[5] Zie [Katscher, 1979, p. 101] Katscher trekt dat in twijfel, afgaande op het voorwoord van Van Ceulen in *Vanden Circkel*

Jansen (ook wel Maritgen Jansdochter), trouwde hij de weduwe van zijn overleden vriend Cloot, Adriana Symonsdochter. Het gezin Van Ceulen bestond nu uit elf kinderen, vijf uit het eerste huwelijk van Van Ceulen en acht kinderen uit het vorige huwelijk van Adriana Symonsdochter.
Naast uitmuntend rekenmeester was Van Ceulen ook een bekende schermer (autodidact[7]), hij bezat een eigen schermschool vanaf zijn vijfentwintigste. Van Ceulen verhuisde naar Leiden in mei 1594. Per 1 maart 1600 onderwees Van Ceulen in rekenkunde, landmeten en vestingbouw aan de Ingenieursschool, verbonden aan de universiteit. Tot zijn dood bleef Van Ceulen leraar aan de Ingenieursschool. Een docent aan de schermschool van Van Ceulen, Pieter Bailly, wilde ook voor zichzelf gaan doceren in de schermkunst. Van Ceulen heeft daar een verbod op laten leggen, mede daarom heeft Van Ceulen altijd zijn schermschool kunnen behouden.[6] Na een lang ziekbed overleed Van Ceulen op de laatste dag van het jaar 1610. Drie dagen later werd hij begraven in de Pieterskerk te Leiden. Op de originele grafsteen van Van Ceulen (verwerkt in een pilaar van de kerk) werden op zijn wens, naast zijn beroep, geboorte- en sterfdatum, de door hem gevonden 35 decimalen van het getal π gegraveerd. Het staat vast dat de grafsteen niet meer bestaat.[7] Sinds 5 juli 2000 is er echter wel een gedenksteen te bewonderen in de Pieterskerk, welke een reproductie is van de originele grafsteen.[8]

Van Ceulen kon geen Grieks en Latijn lezen. Zijn kennis van de *Elementen* van Euclides haalde hij uit de vertaling van de zes eerste boeken van de *Elementen* uit 1562 door Wilhelm Holtzman, ook wel Guilielmus Xylander (1532 - 1576). Het werk van Archimedes met de naam *Kyklou metresis* werd voor hem vertaald door Jan Cornets de Groot (1554 - 1640). Andere kennis vergaarde hij door het lezen van de werken van Europese wiskundigen die (waarschijnlijk) in het Nederlands of Duits gepubliceerd hebben.[9]

Van Ceulen heeft vijf werken gepubliceerd, waarvan één postuum. Hieronder volgt een beschrijving van deze publicaties.
Naar aanleiding van een opgave in een pamflet die in het jaar 1583 in Haarlem aan de kerkdeur gespijkerd werd door Willem Goudaen, presenteerde Van Ceulen zijn oplossing kort daarop aan Goudaen. Goudaen beweerde dat Van Ceulen te laat was met inleveren en keek de uitwerking van Van Ceulen niet in, daardoor kreeg Van Ceulen niet de beloning die beloofd werd in het pamflet. Op dat pamflet heeft ook de uiterste inleverdatum gestaan, Van Ceulen had meerdere getuigen die konden bevestigen dat Van Ceulen voor die laatste inlevertermijn zijn werk gepresenteerd heeft.
Goudaen had in 1581 precies dezelfde soort ruzie met Claes Pietersz.[10] Als reactie op beide voorvallen gaf Goudaen een werkje uit, genaamd *Openbare* (of *Generale*) *presentatie*.[11] Als reactie daarop gaf ook Van Ceulen een werkje uit waarin hij zich verdedigde tegen de bewering dat zijn oplossingen foutief zouden zijn en gaf aan Goudaen twee opgaven mee in *Solutie ende Werckinghe op*

[6] [Katscher, 1979, p. 103]
[7] [Praalder, 1790, p. 99-100]
[8] [Oomes, 2000, p. 59-62]
[9] [Katscher, 1979, p. 105]
[10] [Dold-Samplonius, 1968, p. 268]
[11] Uitgegeven in Dordrecht, 1583

twee Geometrische vragen by Willem Goudaen inde jaren 1580 ende 83 binnen Haerlem aenden Kerckdeure ghestelt. Mitsgaders propositie van twee andere geometrische vraghen.[12]

Tegen het eind van de zestiende eeuw hielden veel wiskundigen zich bezig met de cirkelkwadratuur. Men wilde door constructie de zijde van een vierkant vinden waarvan de oppervlakte gelijk is aan de oppervlakte van een cirkel; in moderne bewoordingen werd gezocht naar een constructie om de lengte $\sqrt{\pi}$ te vinden. Het symbool π werd voor het eerst in 1706 gebruikt door William Jones.[13] Tegenwoordig is algemeen bekend dat het getal π geen breuk is. Het getal π is zelfs een transcendet getal, dat wil zeggen dat π niet te schrijven is als de uitkomst van een algebraïsche vergelijking met rationale coëfficiënten van eindige graad. Daarmee is de lengte π ook niet te construeren. Meerdere wiskundigen gingen op zoek naar een benadering van het getal π, dat werd voornamelijk gedaan met de methode van Archimedes. Deze methode is daarop gebaseerd, dat de omtrek van een omgeschreven en ingeschreven regelmatige veelhoek aan de eenheidscirkel berekend worden, waarmee een boven en ondergrens kan worden bepaald. De van oorsprong Franse wiskundige, Simon van der Eycke, woonachtig in Nederland, berekende met behulp van een 96-hoek dat het getal π gelijk moest zijn aan $\frac{1521}{484} \approx 3,142562$. Allereerst is dat onmogelijk omdat we nu weten dat π niet te schrijven is als breuk, sterker nog, we weten nu dat *pi* transcendet is. Van Ceulen liet zien met behulp van een 192-hoek dat Van der Eycke het fout had, omdat Van Ceulen een omgeschreven 192-hoek becijferde, had hij een bovengrens berekend, de bovengrens was kleiner dan het getal van Van der Eycke. Dit alles beschreef Van Ceulen in *Kort claar bewijs*[14] uit 1585, een pamflet van 6 bladzijden.[15]
Dit pamflet overtuigde Van der Eycke echter niet, maar hij paste wel zijn getal aan en publiceerde dat getal in *Claerder Bewys Op De Quadratuere Des Circkels Anno Vier-en-tachtig Witghe-Witgheven*, [...]. Hij paste echter de waarde van π aan naar een getal dat groter is dan de getallen in het interval van Archimedes (het interval luidt op moderne wijze $\frac{223}{71} < \pi < \frac{22}{7}$).[16] Hierop antwoordde Van Ceulen met het 12 bladzijden tellende pamflet *Proefsteen Ende Claerder wederleggingh dat het claarder bewijs (so dat ghenaempt is) op de gheroemde ervindingh vande Quadrature des Circkels een onrecht te kennen gheven ende gheen waerachtigh bewijs is; hier by gevoeght Een corte verclaringh aengaende het onverstant ende misbruyck inde reductie op simpel interest. Den ghemeenene volcke tot nut.*[17] In dit pamflet geeft Van Ceulen een boven- en een ondergrens van π door de omtrek te berekenen van een om- en ingeschreven 384-hoek.

Van Ceulen heeft ook een uitgebreid werk geschreven waarin hij onder andere beschreef hoe hij tot een benadering van het getal π komt. In het werk onder de naam *Vanden Circkel*[18] beschrijft Van Ceulen alles wat hij belooft in de titel.

[12] Cornelis Claesz, Amsterdam 1584. Zie [Katscher, 1979, p. 106] en [Michel, 2008, p. 12]
[13] [Grattan-Guinnes, 1997, p. 38]
[14] De volledige titel luidt: Kort Claar bewijs Dat die nieuwe ghevonden proportie eens Circkels iegens zyn diameter te groot is ende overzulcx de quadratura Circuli des zelven vinders onrecht zy. Amsterdam, Harmen Janszoon Muller, 1585
[15] [Katscher, 1979, p. 107]
[16] [Ceulen, 1596, voorreden]
[17] Amsterdam, Harmen Janszoon Muller, 1586
[18] Zie ook paragraaf 1.1.1 voor de uitgebreide titel en nadere informatie over dit boek, geprint

Niet alles staat helemaal uitgediept en soms verwijst hij naar zijn grote werk dat nog eens uitgegeven zou gaan worden. Echter is dat grote werk niet meer uitgekomen (zie ook het begin van hoofdstuk 3), ook al is postuum in 1615 nog een boek uitgebracht door zijn vrouw Adriana Symonsdochter in samenwerking met leerling en collega van Van Ceulen Willebrord Snellius onder de naam *De Arithmetische en Geometrische fondamenten. In veele verscheydene constighe questien, soo geometrice door linien als arithmetice door irrationale ghetallen, oock door den regel coss ende de tafelen sinuum ghesolveert.*[19] Volgens Katscher begon Van Ceulen al aan de *Fondamenten* voordat *Vanden Circkel* uitgegeven werd.[20]. In dit boek staan veel voorbeelden, maar ook veel definities en theorie. Mogelijkerwijs was de *Fondamenten* bedoeld als lesboek, delen 2 en 3 zijn lange tijd gebruikt op de Ingenieursschool als lesmateriaal.[21] De *Fondamenten* is een boek met veel voorbeelden waarin basisprincipes van de reken- en meetkunde behandeld worden, maar op sommige punten wordt er dieper op de wiskunde ingegaan.[22]

1.1.1 Vanden Circkel

In het jaar 1596 gaf Van Ceulen zijn eerste grote werk *Vanden Circkel* uit. Zoals hij schrijft in zijn titel, staat in dit boek beschreven hoe de verhouding tussen de omtrek van de cirkel en zijn diameter wordt gevonden. Alle kennis en vaardigheden die daartoe gebruikt moeten worden staat ook beschreven. Ook is er een sinus-, cosinus- en secanstabel[23] en staat beschreven hoe deze gebruikt moet worden. Aanvullend is er ook een tweede boek met theorie over renterekening.[24] Het eerste boek bevat tweeëntwintig hoofdstukken die hieronder uitgesplitst zullen worden.[25] Het tweede deel handelt over "interest" (renterekening), inclusief toepasselijke voorbeelden en handige tabellen.

1. In hoofdstuk 1 staan 35 definities en ander wetenswaardigheden, slechts drie bladzijden lang.
2. In het tweede staan twee proposities, die nodig zijn om de lengte van een omgeschreven veelhoek in een cirkel te bepalen.
3, 4, 5. In de hoofdstukken 3, 4 en 5 wordt geleerd om de lengte van de zijden van veelhoeken ingeschreven in een cirkel te berekenen in irrationale getallen[26].
6. Van Ceulen leert de lezer om irrationale lengtes van koorden te berekenen, wanneer bekend is welk deel van de cirkel wordt beslagen door de koorde.
7. In hoofdstuk 7 wordt geleerd om van irrationale getallen een decimale benadering te geven.

in Delft in 1596.

[19] Uitgegeven te Leiden, Iost van Colster, ende Iacob Marcus, 1615. Vanaf nu aangeduid met de *Fondamenten*

[20] [Katscher, 1979, p. 119]

[21] [Maanen, van, 1987, p. 16-17]

[22] [Vlek, 2008, p. 58]

[23] De secans is gelijk aan één gedeeld door de cosinus

[24] [Ceulen, 1596, titelblad]

[25] Vrij letterlijk overgenomen van Van Ceulens omschrijving in de inhoudsopgave; [Ceulen, 1596, inhoudsopgave]

[26] Irrationale getallen in de tijd van Van Ceulen zijn getallen die niet geschreven kunnen worden als breuk en zonder gebruik te maken van een benadering, er komen dus overwegend wortels in voor, zie ook paragraaf 2.1

8. De oppervlakte van een veelhoek ingeschreven in een cirkel kan worden berekend, hoe dat moet staat in hoofdstuk 8.
9. Hier wordt beschreven hoe de lengte van de omgeschreven veelhoek aan een cirkel berekend moet worden.
10. In dit hoofdstuk worden voorbeelden uitgewerkt bij het vinden van de lengte van gelijkzijdige veelhoeken in irrationalen. Het aantal zijden van de gelijkzijdige veelhoeken vormen een meetkundige rij.
11. Irrationale getallen worden benaderd door reële getallen.
12. Wederom worden irrationale getallen benaderd, maar op een andere manier en met veel voorbeelden.
13. Hier wordt uitgelegd hoe de zijden van ingeschreven figuren berekend worden. In het bijzonder de koorde van een seconde (daarmee is dus de omtrek van een 1296000-hoek te berekenen).
14. In hoofdstuk 14 worden enkele opgaven, die Van Ceulen van Adriaen van Romen ontving, opgelost. Sommige van de opgaven werden al uitgeschreven in variabelen door Adriaen van Romen. In de tijd van Van Ceulen noemde men vergelijkingen in één of meerdere variabelen cossische vergelijkingen, zie ook paragraaf 3.1.
15. De omtrek van de 77- en 65-hoek uitgerekend en nog enkele andere.
16. Het berekenen van zijden van koorden in een cirkel zonder gebruik te maken van cossische vergelijkingen.
17. Dit hoofdstuk bevat de sinus-, cosinus- en secanstabel en een beschrijving hoe deze tabel gebruikt moet worden.[27]
18, 19. In deze twee hoofdstukken wordt geleerd hoe de oppervlakte van stukken land en afstanden gemeten worden, ook op plaatsen waar men niet kan komen met behulp van de tabellen uit hoofdstuk 17.
20. Geleerd wordt de cirkel op te delen in een aantal stukken van gelijke oppervlakte, en nog twee voorbeelden opgelost.
21. Enige opgaven over de cirkel worden opgelost. Deze werden aan Van Ceulen gestuurd door collega wiskundige Scaliger.[28]
22. Tot besluit geeft Van Ceulen honderd problemen aan zijn lezers. De titel van dit hoofdstuk luidt:

HET XXII. CAPITTEL.
Daer inne ick den Leser hondert Ex-
empels schenck/ die slecht zijn/ nochtans niet twijfelen-
de/ de rechte Lief-hebbers sullen lust ende
behaghen daer in hebben.[29]

Vrij vertaald luidt de titel:
Hoofdstuk 22. Waarin ik de lezer honderd opgaven schenk, die makkelijk zijn, desondanks zal de echte liefhebber er veel plezier aan beleven.

In het voorwoord van *Vanden Circkel* staat beschreven welke wiskundigen Van Ceulen aangezet hebben tot het schrijven van het betreffende werk. Si-

[27] Om de sinus, cosinus en secans van een hoek te achterhalen werd gebruik gemaakt van een tabel.
[28] Dat het hier om Scaliger handelt werd onlangs onomstotelijk vastgesteld in een nog te verschijnen boek; [Hogendijk, 2010]
[29] [Ceulen, 1596, fol 66v]

mon van der Eycke wordt genoemd, om zijn benadering van het getal π, maar ook veel wiskundigen die het werk van Van Ceulen aangeboden gekregen hebben, zoals de wiskundigen Jan de Groot, Simon Stevin, Adriaen Ockertszoon Johannes Wilhelmus Velsius, Pieter Janszoon vander Houck, Mathijs Mintens Franchoyshe en Rudolphus Snellius en de burgemeesters Gedion Faleth, Simon Franszoon vander Merwen en Adriaen Anthoniszoon.[30]
In hoofdstuk 21 wordt bewezen dat de oppervlakte van een cirkel kleiner is dan tien maal de diameter in het kwadraat (modern gezegd: $\pi < \sqrt{10}$). Volgens Van Ceulen is de naam van de persoon die dit beweerd zou hebben Bovelli.[31] Tot op heden is het mij niet gelukt te achterhalen wie Bovelli is; Katscher noemt die naam niet in zijn werk. Katscher beweert dat er een andere persoon was die dit ook beweerd heeft, namelijk Joseph-Juste Scaliger (1540–1609). Scaliger sluit daarbij aan in een lange reeks van personen die deze bewering deden, voor zover bekend start de reeks met Brahmagupta (geboren in 598).[32]

Tussen de honderd opgaven die Van Ceulen aan zijn lezers stelt in het 22$^{\text{ste}}$ hoofdstuk, gaan er vijf over transformeren van figuren (zie ook paragraaf 2.2). Daarover weten we dat Van Ceulen hierin onderwees. Het is aannemelijk dat hij uit eigen werk doceerde, het is echter niet duidelijk of hij uit *Vanden Circkel* lesgaf.

1.2 Praalder

Laurens Praalder (1711 Schagen – 1793 Renswoude) is onder andere bekend als de leraar van Belle van Zuilen. Zij was erg gesteld op hem, omdat zij naast over wiskunde ook goed kon discussiëren over religie met Praalder, een persoon "trés libre d'esprit" (aldus in een brief van haar aan Constant d'Hermensches op 25 februari 1764).[33] Naast het aan huis onderwijzen, was Praalder van 1761 tot zijn dood ook docent aan de Fundatie van Renswoude, waar hij werkzaam was tussen 1761 en 1792. Daarvoor was Praalder werkzaam als docent bij het Rotterdamse Zeemanscollege sinds 1751. Praalder was in 1773 medeoprichter en directeur van het Provinciaals Utrechtsch Genootschap. Wegens grote ontevredenheid met de octrooiering van het PUG ruilde hij in 1786 zijn lidmaatschap in voor lidmaatschap van het Genootschap van Kunsten en Wetenschap. Echt bekend werd hij als wiskundige toen het boek *Ludolf van Keulen's voorstellen opgelost* verscheen.[34]

Laurens Praalder is zoon van Gerrit Lourenszoon Praalder en Maertie Bartholomeus, trouwde in Schagen met Geertje Simonsdochter de Haan. Zij kregen meerdere kinderen tussen 1734 en 1751. In het jaar 1751 werd Praalder voorgedragen voor benoeming als mathematicus en examinator der zeeofficieren bij het Rotterdamse Zeemanscollege. Kort daarop verhuisde hij met zijn gezin naar Rotterdam. In de aantekeningen bij het Admiraliteitsvergadering van 30 maart 1756 is te lezen dat men goed te spreken was over Praalder.[35] Ondertussen werd

[30] [Ceulen, 1596, voorreden]
[31] [Ceulen, 1596, fol 61v]
[32] [Katscher, 1979, p. 109-110]
[33] [Dijk, 2006, p. 55]
[34] [Dold-Samplonius, 1968, p. 280]
[35] [Booy, 1980, p. 80]

hem echter opgedragen zonder vergoeding openbare lessen te geven. Praalder was daarvoor al in de veronderstelling dat hij te weinig betaald kreeg, hij had steeds geldgebrek.[36] Daarom gaf hij les aan huis, tot ongenoegen van het Zeemanscollege.

In het oprichtingsjaar van de Fundatie van Renswoude werd Praalder gevraagd om les te geven in Utrecht, hij weigerde, maar toen hij in 1761 nogmaals gevraagd werd met de toezegging van een jaarloon dat anderhalf maal zo hoog was als dat bij het Zeemanscollege, waarbij kost en inwoning inbegrepen was, zegde hij toe.

De Fundatie van Renswoude ontstond uit het stadsambachtskinderhuis te Utrecht, het weeshuis van Delft en het weeshuis van 's-Gravenhage. Deze drie instellingen kregen geld uit een nalatenschap van Maria Duyst van Voorhout, die was overleden op 26 april 1754. Van de nalatenschap moesten de drie instellingen veelbelovende jongens uit de lagere sociale klassen[37] opleiden in onder andere wiskunde, tekenen, schilderen en bouwen van dijken. In 1761 konden de eerste negen jongens beginnen in een speciaal daarvoor gebouwd huis naast het kinderhuis te Utrecht. De wiskundeleraar werd beschouwd als de belangrijkste leraar, welke ook het nauwst betrokken moest blijven met de kweekschool. Praalder was de eerste wiskundedocent en doceerde vanaf 1761 tot en met 1792. Wiskundedocenten aan de Fundatie moesten leerlingen die net van de Kweekschool (vergelijkbaar met de huidige basisschool) af kwamen opleiden tot landmeters, boekhouders, wijnroeiers, stuurlieden, architecten, vestingbouwers enzovoorts.[38]

Praalder kreeg veel voor elkaar: hij eiste een halfjaarloon vooraf uitbetaald te krijgen om zaken af te handelen en hij wilde een maand later beginnen dan eerst overeengekomen werd. Aan beide eisen werd tegemoet gekomen. In 1762 trok hij met zijn familie in het huis van de Fundatie van Renswoude. Onder andere vanwege slecht eten dat geserveerd werd in de instelling en onenigheden met de conciërge, verhuisde het gezin Praalder naar een woning net buiten de Fundatie. Om te bekostigen dat ze nu niet intern woonden en aten, kreeg het gezin Praalder een vergoeding van 300 gulden per jaar.[39] Alle instrumenten waar Praalder om vroeg werden aangeschaft. Hij vroeg om kwalitatief goede, dus ook kostbare, instrumenten. Hij mocht lesgeven aan huis, daaronder had zijn werk aan de Fundatie niet te lijden.

De onorthodoxe religieuze ideeën van Praalder vielen niet bij iedereen in goede aarde, hij zorgde bij zijn werkgevers, de regenten van de Fundatie, tot opschudding.[40]

Bij de Fundatie ontstond de intentie om een opvolger voor Praalder te vinden. Praalder hield dit eerst nog tegen, maar in 1792 werd een opvolger gevonden. Dirk de West werd door Praalder opgeleid, in ruil voor een pensioen van 1000 gulden (ongeveer 2/3 van zijn salaris op dat moment). In 1793 stierf Praalder een plotselinge dood.

Op 22 januari 1773 werd het Provinciaal Utrechts Genootschap (PUG) opgericht door Mr. Johs. van Haeften en Praalder. Praalder was directeur van

[36] [Graafhuis, 1961, p. 81]
[37] [Beckers, 2003, p. 66]
[38] [Booy, 1980, p. 112-117]
[39] [Graafhuis, 1961, p. 84]
[40] [Mijnhardt, 1984, p. 206]

het PUG tussen 1773 en 1785. Vijf jaar na oprichting kreeg het genootschap de titel "Provinciaal Utrechtsch Genootschap van Konsten en Wetenschappen".[41] Het verkrijgen van deze titel, de octrooiering, bracht ook veel verplichtingen met zich mee. Binnen het PUG ontstonden twee kampen. Het kamp met de oudere garde, waaronder Praalder, wilden graag tot nut zijn van het volk en de Republiek, door concrete praktische problemen op te lossen. De octrooiering van het PUG was voor Praalder een nederlaag, omdat het genootschap daarmee meer werd zoals de bestaande genootschappen. Het is daarom dat Praalder, samen met meerdere PUG-leden, zich in 1786 aanmeldde bij het "Genootschap van Kunsten en Wetenschappen: Tot Nut van 't Algemeen" (Nut). Het Nut werd twee jaar daarvoor in Edam opgericht en stond kritisch tegenover vrijwel alle andere genootschappen, daar zij niets betekenden voor de gewone man of voor educatie in het algemeen.[42] Het Nut vervaardigde onder andere vertalingen uit het Latijn voor hen die geen Latijn lazen. Zoals ook gebeurde in de vroege jaren van het PUG.

In het jaar 1752 geeft Praalder zijn eerste werk uit, hij was toen nog werkzaam bij het Zeemanscollege, bovendien maakt hij deel uit van een examencommissie, getuige het werk *Verhael van 't gepasseerde beneffens d'examen die gehouden is, ter gelegentheit der beroepinge van Adriaan Visser, tot stats schoolmeester en voorzanger te Purmerende.* Dit is een werk aangaande het aanstellen van een opvolger van Evert Bruining, welke doceerde aan de "Stats School te Purmerende".[43] De opvolger moest gaan doceren in lezen, schrijven, rekenkunde, meetkunde, stuurmanskunst, Italiaans, scheepsboekhouding en hij moest tijdens kerkdiensten toezicht houden op de kinderen. Daarop reageerden eenentwintig gegadigden, waarvan er twaalf deelgenomen hebben aan het examen. Na twee stemrondes[44] kwam daaruit de persoon Adriaan Visser. Vervolgens is aan Praalder gevraagd door enkele Noord-Hollandse schoolmeesters de opgaven openbaar te maken. Het resulterende werk telt zevenentwintig bladzijden aan uitwerkingen.[45]
Een jaar later gaf Praalder het werk *Gronden der wiskonst, behelsende een klaere fondamentele instructie van de mathesis* uit. Dit is een duidelijk boek waarin de lezer geleerd wordt te rekenen met de sinus, cosinus, tangens en secans, maar ook te rekenen met driehoeken en sferische driehoeken en navigeren. Dit boek bevat daarom driehoeksmeetkunde in het platte vlak, maar ook boldriehoeksmeetkunde en het berekenen van de positie aan de hand van zondeclinatie (hoogte van de zon ten opzichte van de hemelequator). Na elke stelling staat eerst een getallenvoorbeeld, gevolgd door het bewijs. Het boek is mooi opgebouwd met veel voorbeelden, een echt leerboek, ook bedoeld voor reeds bekwame zeelieden.[46] Het aanhangsel bevat vijfentwintig opgaven zonder oplossing die door de lezer opgelost dienen te worden, welke overigens niet over de behandelde stof in het boek gaan. Praalder vraagt zijn lezers om zelf antwoord te geven op de lege bladzijden. Naast de eigen bekwaamheid in de wiskunde te verbeteren zegt

[41] [Singels, 1923, p. 22]
[42] [Mijnhardt, 1984, p. 189]
[43] wed. P van Gilst, Rotterdam, 1752; zie [Praalder, 1752]
[44] Er wordt niet beschreven of er ook examens afgenomen werden op de andere vakgebieden, dit is echter wel aannemelijk.
[45] [Praalder, 1752, voorwoord]
[46] [Praalder, 1753, inleiding]

Praalder dat het uitwisselen van uitwerkingen op deze opgaven vriendschappen kan aanhalen.[47]
Het exemplaar van *Gronden der wiskonst* welke voor deze scriptie bekeken is, bevatte alle oplossingen van de vijfentwintig opgaven uit het aanhangsel. Bij sommige opgaven wordt verwezen naar oplossingen die ook uitgewerkt zijn in het maandelijkse blad *Schoolnieuws* (zie tabel 1.1). Aanvullend is ook ingebonden het werk *Verhael van 't gepasseerde*, met ook alle uitwerkingen op de opgaven uit het examen. Omdat dit betreffende exemplaar van de boeken uit

Opgave nr. Praalder	Opgave nr. *Schoolnieuws*	editie
1	426	augustus 1756
4	398	juli 1756
19	827	maart 1758
22	784	(onbekend)

Tabel 1.1: Verwijzing naar *Schoolnieuws*

de collectie van Utenhove komt die aan de Utrechtse Universiteitsbibliotheek geschonken is, is het zeer goed mogelijk dat dit uitwerkingen zijn van Praalder zelf, of van "de jongen Utenhove", Praalder heeft les aan hem gegeven (niet aan de Fundatie, getuige het feit dat weesjongens uit de lagere sociale klassen onderwijs genoten op de Fundatie en "de jongen Utenhove" uit een rijke familie kwam).[48]

Tussen de jaren 1773 en 1775 diende Praalder drie werken in bij het PUG welke nooit gedrukt werden. De titels van deze werken zijn *Over de Aardglobe* (een studie in drie stukjes), *Over de Water- Molens* en *Over de Burgelijke Tijdrekening.*[49]
Mogelijk behoren ook tot de lijst met gedrukte werken van Praalder ook de drie werken *Handelende over de Voorberijdselen tot deze wetenschap. Met de noodige voorbeelden op dezelve toegepast*, het werk *Van de Simpele Equatie. Vervattende een voorraad van voorbeelden, om een voorstel tot een Equatie te brengen en vervolgens te reduceren* en *Van de Progressien.*[50] Dold-Samplonius heeft hiervoor in het jaar 1965 de inventaris opgemaakt van boeken die in de loop der tijd door "het wiskundig genootschap" aan "het mathematische genootschap" te Amsterdam ter bewaring gegeven zijn.[51] Tot de items die aan Praalder toegedacht zijn, was niet het boek *Gronden der wiskonst* aanwezig.[52]
Daarnaast weten we dat de oude bibliotheek van het Bataafsch Genootschap volledig werd verwoest bij het bombardement op Rotterdam (in de tweede wereldoorlog). Daar moeten zich ook boeken van het PUG bevonden hebben, getuige een inventarislijst waar onder andere *Gronden der Wiskonst* van Praalder op stond.[53]

[47] [Praalder, 1753, aanhangsel]
[48] [Moll, 1839, p. 86-87]
[49] [Graafhuis, 1961, p. 99]
[50] [Dold-Samplonius, 1968, p. 288]
[51] Of met deze namen de betreffende genootschappen eenduidig te bepalen zijn is onduidelijk uit de tekst van Dold-Samplonius.
[52] [Dold-Samplonius, 1968, p. 241]
[53] [Beckers, 2003, p. 288]

Het is zeker dat Praalder meerdere kleine werken geschreven heeft, voor het PUG heeft hij namelijk enkele verhandelingen geschreven.[54] De eerste twee verhandelingen door het PUG (die naar alle leden ter inzage en aanvulling gestuurd werden) waren van de oprichters Praalder en Van Haeften. Waar deze werken gebleven zijn en of er nog exemplaren van bestaan is onduidelijk.

1.2.1 L. van Keulen's wiskundige voorstellen opgelost

In het jaar 1771 komt als onderdeel van het tijdschrift *Oeffenschool der Mathematische Weetenschappen* een werk uit van de hand van Praalder welke in de jaren 1777 en 1790 als boek uitgegeven wordt. De titel van de drie edities zijn verschillend. Voor deze scriptie is de editie uit 1790 bestudeerd, daarom wordt in deze scriptie de titel van die editie gebezigd; *L. van Keulen's mathematische voorstellen opgelost*. In het jaar 1790 is Praalder niet meer lid van het Provinciaals Utrechts genootschap, het PUG, maar wel van het Nut en nog steeds werkzaam bij de Fundatie. Bij sommige drukken van het boek van Praalder is een erratum toegevoegd (het exemplaar in Utrecht uit 1790 en het exemplaar in Leiden uit 1777, maar niet het exemplaar in Leiden uit 1790). Zoals genoemd zal worden in de paragraaf 1.2.2, gaat het betreffende erratum niet over een boek van Praalder. In hoofdstuk 5 staan eigenaardigheden welke verklaard kunnen worden door de verschijning in *Oeffenschool der Mathematische Weetenschappen*.

Dit boek bevat slechts één hoofdstuk, genaamd *Oplossingen der honderd konstige vraagen van Ludolf van Keulen*, dit boek bevat geen inleiding. Vanaf opgave 63 staat bovenaan de bladzijden niet meer de tekst *Oplossingen der konstige Vraagen van LUDOLF van KEULEN*, maar *Byvoegsel tot het Mengel-Werk*. Waarom de koptekst veranderd is onduidelijk, in paragraaf 1.2.2 zal nader gekeken worden naar dit vraagstuk. De naam van het eerste hoofdstuk doet vermoeden dat Praalder alle honderd opgaven oplost. Echter na opgave 70 zegt Praalder dat hij de opgaven 71 tot en met 100 niet interessant genoeg vindt om de oplossingen te publiceren (zie ook paragraaf 4.3).

Waarom en voor wie Praalder dit boek schreef is onduidelijk. Omdat het boek geen inleiding bevat zal de precieze doelgroep ook onduidelijk blijven. Mogelijkerwijs wilde Praalder laten zien wat hij kon, hij heeft namelijk veel aanmerkingen, stellingen, lemma's en op enkele opgaven ook meerdere oplossingsmethoden gegeven. Omdat hij ervoor koos meerdere oplossingen op te schrijven, zit er ook gelijk een didactisch tintje aan zijn boek, echter daar het uitwerkingen betreft en weinig tot niets te beantwoorden overlaat zou dit tegenwoordig geen lesboek zijn. Bovendien heeft Praalder al eerder het boek *Gronden der wiskonst* geschreven, dat boek heeft een didactischer aard. Dat doet vermoeden dat *Verzameling van enige mathematische voorstellen* niet bedoeld was als een didactisch boek. Het is ook mogelijk dat Praalder om een andere reden de opgaven van Van Ceulen oploste en zijn werk graag met anderen wilde delen. In het licht van zijn lidmaatschap van het Nut en zijn opvattingen zullen de lemma's en stellingen met bewijzen betekenen dat Praalder dit werk schreef voor de gewone man die zich wilde bekwamen in de wiskunde.

[54][Singels, 1923, p. 127]

In dit werk verwijst Praalder meermalen naar Abraham de Graaf[55] (1635 - ca 1717), die ook oplossingen gegeven heeft op de opgaven van Van Ceulen. Bij bestudering van het betreffende boek, *Inleyding tot de wiskunst*, blijkt dat inderdaad Abraham de Graaf antwoord gegeven heeft op de opgaven 17, 20, 21, 33, 44, 52, 57, 60, 65, 67 en 70 van Van Ceulen. De Graaf gaf antwoord op deze opgaven om voorbeelden te geven bij de theorie in zijn boek, wat klaarblijkelijk als leerboek ter inleiding op de meetkunde en algebra bedoeld is.[56] Zoals zal blijken in paragraaf 3.3, levert opgave 57 veel aanknopingspunten voor het beantwoorden van de onderzoeksvraag, omdat Van Ceulen over zijn oplossing van deze opgave een brief geschreven heeft. Een passage van De Graaf uit *Inleyding tot de wiskunst* aangaande dit probleem[57] heeft Praalder aangezet tot het schrijven van een algemene oplossingsmethode. Dit alles zal uiteengezet worden in paragraaf 3.3 en subparagraaf 3.3.1.

1.2.2 Oeffenschool

Het werk van Praalder zag al eens eerder het licht, namelijk als onderdeel van het werk *Oeffenschool der Mathematische Weetenschappen* van Arnold Bastiaan Strabbe (1741–1805) in het jaar 1771. Ondanks dat er slechts twee jaargangen verschenen zijn, was *Oeffenschool der Mathematische Weetenschappen* bedoeld als tijdschrift voor lezers die zich wilden bekwamen in de wiskunde. Echter zag Strabbe zich na de tweede jaargang al genoodzaakt om te stoppen met dit tijdschrift door een te lage afname.

> De uitgeever van dit Werk zou ook misschien niet tot de gedagten gekomen zyn, om de verdere uitgave met dit tweede Deel te staaken, indien hy, door den allengskens verminderden aftrek, niet ten laatsten tot zyne schade had moeten arbeiden.

> Ik besluit dan (hoewel ongaerne) dit *Oeffenschool der Mathematische Weetenschappen*, dat door myne hooggeagte Medearbeiders en andere Kunstvrienden met zo veel toejuiching is ontfangen, en waar in myn oogmerk geweest is, mynen landgenooten te helpen, en, zo veel in myn vermogen was, te bevorderen en bekwaamer te maaken, eindelyk eenen loffelyken naaryver op te wekken, ten einde dus voor my zelven en anderen nuttig te zyn.[58]

In totaal zijn er vier banden verschenen onder de titel *Oeffenschool der Mathematische Weetenschappen* in sets van twee banden. Het eerste en derde band heten "eerste stuk" en bevatten een "Mathematische handleiding", hierin worden stellingen behandeld aan de hand van voorbeelden. De banden twee en vier heten "tweede stuk" en bevatten "Mengelwerk eene keurige versaameling van mathematische voorstellen". Deze banden bevatten geen inleiding, maar wel een lijst met wiskundigen die bijgedragen hebben aan de vele opgaven met uitwerkingen waaruit deze banden bestaan.

[55] Zie [Praalder, 1790, p. 157-158, 162-164, 170, 184, 187-188, 250]
[56] [Graaf, 1706, inleiding, fol *2r en v]
[57] [Graaf, 1706, p. 344]
[58] [Strabbe, 1771a, voorrede VI]

Getuige het voorwoord van de eerste band van *Oeffenschool der Mathematische Weetenschappen* wilden sommige lezers graag een algemeen boek met de beginselen van de meetkunde hebben.

> [...] na dat reeds eenige Stukjes van dit Werk (*Oeffenschool der Mathematische Weetenschap*, red) het licht zagen, bericht wierdt, dat veele Ongeöeffende Liefhebbers, welke zich, door mynen arbeid in de Wiskunde poogden te bevorderen, wel gewenscht hadden, dat ik met de eenvouwdigste beginselen der mathematische Weetenschappen een aanvang hadt gemaakt; zo heb ik my wel willen verledigen, om ook aan den wensch van deezen te voldoen.[59]

Dit is de reden dat het boek *Gronden der meetkunst* door Strabbe geschreven werd. Getracht is om een werk te schrijven welke minder saai maar didactischer is dan voorgaande werken van andere Nederlandse wiskundigen. Voor het theoretische gedeelte heeft het werk „van den geleerden Engelschen Wiskunstenaar THOMAS SIMPSON (Elements of Geometry) tot een grondslag"[60] gediend. Er wordt algemeen aangenomen dat *Gronden der Meetkunst* een vertaling is van het werk van Thomas Simpson.[61] Dat zou een goede verklaring zijn dat Strabbe zo snel na het uitbrengen van het eerste deel van *Oeffeschool der Mathematische Weetenschappen* een dergelijk boek kon publiceren. In het voorwoord van beide werken verwijst Strabbe naar het andere werk, dus bij publicatie van beide werken had het andere werk al moeten bestaan. Als Strabbe niet een vertaling vervaardigde, lijkt het erop dat *Oeffenschool der Mathematische Weetenschappen* een excuus of voorwendsel was om *Gronden der Meetkunst* te publiceren.

Zoals eerder genoemd, zag het werk van Praalder voor het eerst het licht in *Oeffenschool der Mathematische Weetenschappen*, in het derde deel om precies te zijn. In het voorwoord wordt het werk van Praalder als volgt geïntroduceerd.

> [...] een byvoegsel tot hetzelve, behelzende de Oplossingen der zeventig eerste Konstige Vraagen van *Ludolf van Keulen*, met noodige aanmerkingen en nuttige uitbreidingen verrykt door *Laurens Praalder*, Mathematicus te *Utrecht*.[62]

Bij bestudering bleek dat het werk van Praalder in *Oeffenschool der Mathematische Weetenschappen* exact hetzelfde zetsel heeft als de werken van Praalder uit de jaren 1777 en 1790, behalve het titelblad, de koptekst en het erratum welke voorkomt in sommige exemplaren van de drukken uit 1777 en 1790.[63] De titel van het werk van Praalder in de derde band van Strabbe luidt *Byvoegsel tot het Mengel-werk. Beheldzende de oplossingen der honderd konstige vraagen van Ludolf van Keulen. Verrykt met noodige aanmerkingen en nuttige uitbreidingen, welken tot eene byzondere verklaaring daar toe behoorden. Door Laurens Praalder, Mathematicus tot Utrecht*, en bovenaan de bladzijden staat „Bijvoegsel tot mengelwerk". Hiermee is verklaard waarom vanaf opgave 63 in de drukken uit 1777 en 1790 dezelfde tekst staat, maar nog niet waarom de koptekst verschilt

[59] [Strabbe, 1770a, voorrede]
[60] [Strabbe, 1770a, voorrede]
[61] [Beckers, 2003, p. 38]
[62] [Strabbe, 1771a, voorrede, p.VI]
[63] Het erratum heeft geen betrekking op het werk van Praalder, echter ook niet op de bestudeerde werken van Strabbe.

in de drukken van 1771 en 1777.[64]

Het werk van Praalder verscheen in 1777 en 1790 nogmaals als boek. Dat hoeft niet te betekenen dat het werk van Praalder zo populair was. Veel drukkers voegden werk toe aan bladen en tijdschriften (vaak in aparte katernen) om risico te spreiden.[65] Dat er risico's verbonden waren aan het uitgeven van boeken en tijdschriften in de tijd van Praalder wordt geïllustreerd aan de hand van *Oeffenschool der Mathematische Weetenschappen* welke na de tweede jaargang al genoodzaakt was op te houden te bestaan. Als de oplage van een tijdschrift groter bleek dan de afname, besloot de drukker vaak om katernen uit het tijdschrift als boek uit te geven.[65] Het is aannemelijk dat dit ook het geval is geweest bij het werk van Praalder, omdat de drie werken vrijwel identiek zijn. Wanneer werken herdrukt werden op een later tijdstip, ging de kwaliteit van met name platen erg achteruit.[65] De platen van de werken van Praalder lijken geen kwaliteitsverlies te vertonen. Echter is met deze theorie niet te verklaren waarom de koptekst in de drukken van 1777 en 1790 tot aan opgave 63 anders is dan in de versie van 1771.
Het is mij onmogelijk gebleken om over dit onderwerp een sluitende conclusie te trekken. Verder onderzoek is nodig.

Gronden der meetkunst en *Oeffenschool der Mathematische Weetenschappen* werden uitgegeven bij uitgever Jan Morterre. Morterre is ook de uitgever van de editie uit 1771 van het werk van Praalder. Uitgever Morterre werd na faillissement overgenomen door Smit, welke de uitgever van Praalders werk uit 1790 is.

In hoofdstuk 5 zullen enkele eigenaardigheden uit het werk van Praalde bekeken worden in het licht van *Oeffenschool der Mathematische Weetenschappen* en *Gronden der meetkunst*.

---

[64] Zie ook bijlage B
[65] Privécorrespondentie met D. Beckers, 4 februari 2009.

Hoofdstuk 2

Meetkunde

Van Ceulen startte zijn honderd opgaven met tien opgaven over meetkunde. In dit hoofdstuk zullen we zien hoe deze opgaven gesteld stonden en of Praalder ze net zo oploste als Van Ceulen dat voor ogen had. In paragraaf 2.2 staan vijf opgaven besproken die handelen over het transformeren van veelhoeken naar driehoeken. We zullen er zien dat Praalder sommige van die opgaven anders oploste dan Van Ceulen voor ogen moet hebben gehad.
Het oplossen van de opgaven 1 tot en met 4 vergt veel expliciete kennis over de meetkunde zoals de Grieken die bedreven. Deze vier opgaven betreffen figuren waarin lengtes gegeven zijn en andere lengtes gevonden moeten worden. Het is zeer aannemelijk dat Praalder deze opgaven hetzelfde oplostte als Van Ceulen bedoeld heeft. Zelf zegt Praalder dat hij het precies zo gedaan heeft als Van Ceulen bedoeld heeft (zie paragraaf 2.1).
Twee opgaven, namelijk 5 en 6, staan tussen de meetkundige opgaven, maar moeten numeriek opgelost worden. Daarom zullen deze opgaven besproken worden in paragraaf 4.1.

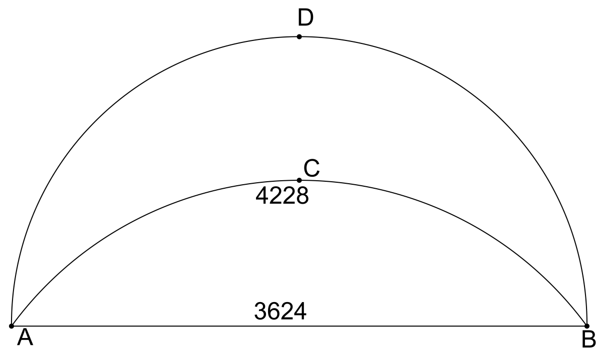
2.1 De eerste vier opgaven

De opgaven 1 tot en met 4 onderscheiden zich van de andere zes meetkundige opgaven door de noodzaak om stellingen te gebruiken van Griekse wiskundigen. De eerste opgave is gelijk opvallend, niet om de opgave zelf, maar om hoe hij opgelost moet worden. Opgave 2 is noemenswaardig om de manier waarop Praalder een stelling introduceert en opgave 3 vanwege Praalders manier om deelresultaten te noemen. Over de vierde opgave is niet veel op te merken. Daarom treft u hieronder beschrijvingen van de eerste drie opgaven.
De eerste opgave luidt als volgt, zie figuur 2.1.

> 1. . In desen Maen gheteeckent met ADBC, doet den ondersten Boghe 4228, ende de *Corda* AB doet 3624, ende den Maen is in syn breedtste middel breedt 906 roeden, *Vraghe.* Hoe lanck is den buytensten Boghe ADB, ende hoe groot is den Maen?[1]

Bij het oplossen is het nodig om een schatting te maken van de hoek AMB, waarbij M het middelpunt is van de kleine boog. Doordat er gewerkt moet

[1] [Ceulen, 1596, fol 67r]



Figuur 2.1: Figuur bij vraag 1

worden met een schatting, wordt de oplossing minder nauwkeurig dan wanneer de hoek te berekenen zou zijn geweest. Van Ceulen stelde zelf een sinus-, cosinus- en secanstabel op; in zijn boek *Vanden Circkel* in hoofdstuk 17 staat een dergelijke tabel. Dat er een sinuswaarde nodig is, zegt Van Ceulen ook in het begeleidende stukje tekst van opgave 4.

> [...] De eerste Vrage van dese vier, hebbe ick (*Godt alleen de Eer*) gesolveert, door de Tafel *Sinuum*, de ander dry op ghelosset, ende het begheeren ghevonden in Irrationale ghetallen.[2]

Van Ceulen zegt dat de eerste opgave opgelost werd door gebruik te maken van een sinustabel. De andere drie opgaven lostte Van Ceulen op en vond antwoorden in irrationale getallen (waarover hieronder meer). Als reactie hierop zegt Praalder dat hij de opgaven ook zo beantwoord heeft. De opmerking die Praalder daarna toevoegt lijkt misplaatst.

> [...] en alhoewel Ludolf op deeze Vraagen geene antwoorden geeft, zal het nogthans zeker genoeg zyn, dat wy het waare doel-wit derzelve getroffen hebben. Men kan uit deeze aanteekening gevoegelyk besluiten, dat deeze vier Voorstellen, in dien tyd, voor zwaare, of kunstige, Voorstellen zullen gehouden zyn, daar dezelve, myns bedunkens, echter niet zwaarwigtig zyn, en volgens de eerste gronden der Meetkunst met behulp van de *Theorie* der *Surdische* grootheden, gemakkelijk opgelost kunnen worden.[3]

Uit de opmerking van Van Ceulen over de eerste vier opgaven is het niet overduidelijk dat Van Ceulen geweten heeft dat het voor zijn tijdgenoten moeilijke opgaven zouden zijn, zoals Praalder zegt. Van Ceulen gaf het tweeëntwintigste hoofdstuk een ondertitel, zoals te lezen is in paragraaf 1.1.1. Daarin staat juist te lezen dat hij de opgaven niet moeilijk vindt, maar wel denkt dat de echte liefhebber er veel plezier aan zal beleven. Praalder lijkt hier dus ongelijk te hebben. Behalve als we "surdische grootheden" meenemen in onze overweging. Dit zijn getallen die Van Ceulen aanduidde met "irrationalen". Irrationale getallen als geometrische waarde, deden definitief hun intrede in de wiskunde tijdens de Renaissance. Desondanks waren irrationale getallen in de tijd van Van Ceulen niet

[2] [Ceulen, 1596, fol 67r]
[3] [Praalder, 1790, p. 37]

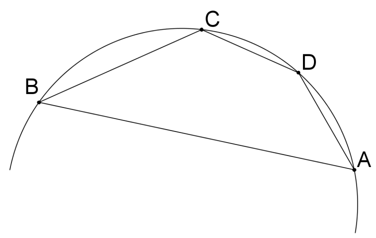
vanzelfsprekend een juist antwoord op een meetkundig probleem.[4] Alhoewel de Grieken al wel bekend waren met irrationale getallen.[5] Uit de oplossingen die Van Ceulen geeft nadat hij opgaven stelt, mogen we concluderen dat hij getallen die niet te schrijven zijn als breuk, maar ook niet benaderd worden irrationale getallen noemt. Tegenwoordig noemen wij deze getallen nog steeds irrationaal, maar definiëren ze anders. Wij definiëren irrationale getallen als getallen in de verzameling van reële getallen uitgezonderd de rationale getallen. Daarmee is de huidige definitie ruimer dan die van Van Ceulen was (denk bijvoorbeeld aan het getal π, welke niet alleen irrationaal, maar ook transcendent is).

De tweede opgave gaat om een koordenvierhoek die in twee delen wordt gedeeld door een lijnstuk. De opgave is om de oppervlakten uit te rekenen van de twee delen. Om deze opgave op te lossen introduceert Praalder een lemma met bewijs. Na bestudering blijkt het hier te gaan om de stelling van Ptolemeus.

Stelling 1 (Ptolemeus) *Als vierhoek $ABCD$ een koordenvierhoek is, dan geldt dat*

$$AC \times BD = AB \times CD + BC \times AD.$$

Een vierhoek is een koordenvierhoek als alle hoekpunten op dezelfde cirkel liggen, zie figuur 2.2. We weten dat voor 3 punten geldt dat er één unieke cirkel doorheen gaat. Een vierde punt moet dus op die cirkel liggen om een koordenvierhoek te kunnen vormen met de eerste drie punten.



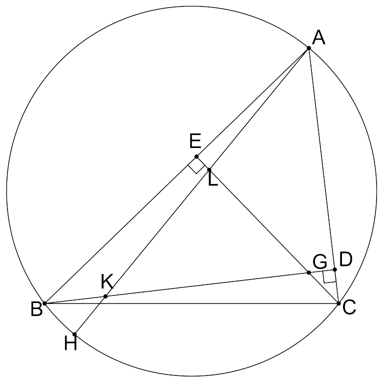
Figuur 2.2: Koordenvierhoek $ABCD$

Praalder geeft op meerdere opgaven meer dan één oplossing. Deze tweede opgave van Van Ceulen lost Praalder op drie manieren op. Bij de eerste en tweede methode verwijst Praalder naar het lemma welke hij zelf stelde en bewees (het lemma is de stelling van Ptolemeus, maar wordt door Praalder niet zo genoemd). Bij de derde wijze van oplossen verwijst Praalder naar de stelling van Ptolemeus door te refereren aan het bewijs hiervan door Abraham de Graaf in *Inleiding tot de Wiskunst* op pagina 295.[6] Ook in de voetnoot op pagina 9 wordt er verwezen naar de stelling van Ptolemeus, er wordt verwezen naar stelling 17 in het derde boek van *Gronden der Meetkunst*. Het is aannemelijk dat dit hetzelfde boek is als het boek dat aangeduid werd met "Meetk." (zie ook paragraaf 1.2.2).

[4] [Bos, 2001, p. 130, 138-142]
[5] [Grattan-Guinnes, 1997, p. 48-50]
[6] [Praalder, 1790, p. 9-21]

Het is op zijn minst opmerkelijk te noemen dat Praalder voor één stelling naar drie plaatsen refereert. Mogelijk heeft Praalder niet zelf de voetnoot geschreven (zie hoofdstuk 5).

Opgave 3 gaat over een omschreven driehoek waarin een tweede driehoek wordt geconstrueerd. De opgave is om de lengtes van de kleine driehoek te bepalen (zie figuur 2.1).



Figuur 2.3: Figuur bij opgave 3

> 3. . In den hier-teghen-ghestelden Circkel, is den Triangel ABC beschreven, doet AB 40. BC 32. AC 28, ende uyt de winckels B ende C zijn ghetrocken de twee perpendiculaer Linien BD ende EC. Item uyt den winckel A den Diameter AH door't Centrum F ghetrocken, welcke door snijdet de beyde Perpendiculaer Linien, in de puncten L ende K werdt door dezen ghemaeckt den binnensten Triangel LKG. *Vraghe.* Hoe lanck is elcke syde, als LK. KF. ende GL.[7]

Eerst beantwoord Praalder de vraag op een niet erg elegante manier. Daarna stelt hij twee deelresultaten als stelling om die te bewijzen en daarmee de opgave op een elegantere manier op te lossen. Tegenwoordig zouden deze deelresultaten niet als stelling geponeerd worden, omdat ze gelden op deze zeer specifieke situatie, namelijk die van opgave 3.
Praalder zegt

> De menigvuldige Eingenschappen, welke in deeze Figuur te vinden zyn, verschaffen een ruim veld van fraaije en nuttige bespiegelingen. Het zal derhalven niet ongevoegelyk zyn, een korte aanleiding hier toe te geeven, en deeze Eigenschappen by wyze van *Theoremata* te vervolgen.[8]

Praalder zegt hiermee dat hij vele mooie eigenschappen ziet in deze figuur. Enkele daarvan geeft hij aan zijn lezers, namelijk 4 stellingen met bewijs, welke niet bedoeld zijn om antwoord te geven op de oorspronkelijke vraag.

[7] [Ceulen, 1596, fol 67v]
[8] [Praalder, 1790, p. 31]

2.2 Transformaties van figuren

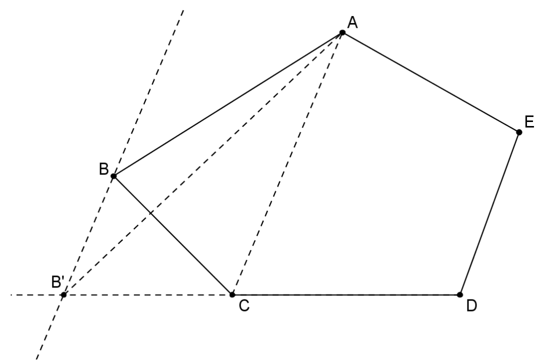
Tussen opgave 6 en 7 leert Van Ceulen zijn lezers om de oppervlakte van een veelhoek uit te drukken in de oppervlakte van een driehoek door constructie, laat ons dit simpelweg aanduiden met "transformatie". Hoe die transformatie moet geschieden staat hieronder beschreven. Evenals bijzonderheden aan de manier van oplossen van transformatieopgaven door Praalder. In paragraaf 2.2.1 staat beschreven hoe Praalder het transformeren uitlegt en in paragraaf 2.2.2 staat de oplossing van opgave 8 uitgeschreven op de manier zoals Van Ceulen dat bedoeld moet hebben en de algebraïsche manier van Praalder.
Van Ceulen leidt deze theorie over transformeren in op de volgende manier:

> Om de volghende vijf questien te beantwoorden, ist van noode met een corte behendicheydt, een veelsydighe Figuer te brengen in eenen Triangel ofte Quadraet, daer uyt te mercken is, dat alle Figueren met rechte Linien besloten, connen verandert werden, naer welbehaghen.

Van Ceulen zegt hiermee dat het nodig is om een veelhoek te veranderen naar een driehoek of een vierkant om de volgende vijf opgaven op te lossen. Bijzonder is dat Van Ceulen zijn lezers niet voor doet hoe een willekeurige driehoek getransformeerd kan worden maar een vierkant.

Hier volgt een samenvatting van hoe veelhoeken getransformeerd moeten worden tot een driehoek, beschreven op moderne wijze. Van Ceulen gaf zijn lezers geen algemene beschrijving, maar deed de "behendigheid" vier maal voor met als startfiguren een, vier-, vijf-, zes- en zevenhoek.
Om een willekeurige n-hoek te transformeren kiezen we 4 opeenvolgende hoekpunten. Bijvoorbeeld de hoekpunten A, B, C en D, zie figuur 2.4. Kies koorde AC als basis van driehoek ABC. Trek een lijn evenwijdig aan AC door B. Dan geldt voor de oppervlakte van elke driehoek APC met P op de lijn evenwijdig aan AC door B dat die gelijk is aan de oppervlakte van driehoek ABC. Immers, omdat P op de lijn parallel aan AC ligt, is de hoogte van elke driehoek APC met basis AC gelijk, dus blijft de oppervlakte gelijk.
Verleng zijde CD, het snijpunt van de verlengde lijn en de lijn parallel aan AC door B noemen we B'. De veelhoek met B vervangen door B' heeft dezelfde oppervlakte als de eerste veelhoek, echter is C nu geen hoekpunt meer, maar een punt op een zijde. Deze behendigheid kan uitgevoerd worden, onafhankelijk van het aantal hoekpunten tussen A en D. Dus zo kan elke willekeurige n-hoek getransformeerd worden naar een $n-1$-hoek met dezelfde oppervlakte als de veelhoek waarmee werd gestart. Door dit proces te herhalen kan een willekeurige veelhoek getransformeerd worden naar een driehoek met dezelfde oppervlakte als de veelhoek waarmee werd gestart.

Afgaande op de letterlijke interpretatie van bovenstaande citaat, zou het hier gaan over de opgaven 7 tot en met 11, het is mogelijk om al deze 5 opgaven op te lossen met behulp van transformaties. De opgaven 7, 8 en 9 zijn vervolgopgaven. Opgaven 10 en 11 lijken erg op elkaar.
Opgave 12 kan ook opgelost worden met behulp van transformaties, echter zouden er dan zes opgaven opgelost worden met behulp van transformaties. Bij opgave 12 schrijft Van Ceulen het volgende.



Figuur 2.4: Transformatie van 5- naar 4-hoek

> Item de syden des Trianghels, ende figuer A als aen elcke geteeckent, als nu den begheerden naer der conste van *Geometrici* genough ghedaen.[9]

Het lijkt mij dat Van Ceulen hier zegt dat er genoeg opgaven opgelost zijn met behulp van meetkunde. Toch is niet met zekerheid te zeggen wat het woord "genough" betekent in deze context. Uit hoe Praalder deze passage van Van Ceulen vertaalde, kunnen we niets afleiden over hoe "genough" geïnterpreteerd moet worden.

> Indien nu de zyden des Driehoeks, zo als die in de Figuur geteekend staan, gegeeven zyn, en dat begeerde Meetkunstig voldaan is, vraagt men, hoe lang iedere zyde van de Figuur A moet zyn?[10]

Bij opgave 12 is het de bedoeling om een driehoek te vinden met dezelfde oppervlakte als een gegeven veelhoek en gelijkvormig aan een gegeven driehoek. Deze opgave is op te lossen met behulp van transformaties, maar zeker ook zonder.

Praalder lost alle opgaven 7 tot en met 9 en 12 op met behulp van algebra door gebruik te maken van gelijkvormige driehoeken. Aansluitend op de algebraïsche uitwerking vertelt Praalder zijn lezers hoe opgaven 8, 9 en 12 opgelost kunnen worden met behulp van transformaties, maar besluit die uitwerkingen niet met een getal als antwoord. De meetkundige uitwerkingen zijn daarom slechts een beschrijving, vergezeld met een bijbehorende afbeelding op de bijlage. Opgaven 10 en 11 lost Praalder wel op met behulp van transformaties zoals Van Ceulen dat bedoeld moet hebben. Het gaat hier om het deel van een veelhoek te bepalen met dezelfde oppervlakte als een andere veelhoek. In opgave 10 gaat het om een zeshoek waar een deel van bepaald moet worden met dezelfde oppervlakte als een gegeven vierhoek en bij opgave 11 gaat het om een zeven- en een zeshoek.

Afgaande op de oplosbaarheid van opgaven 7 tot en met 11 met behulp van meetkunde, mag aangenomen worden dat Van Ceulen doelde op die opgaven toen hij zei dat de "volgende vijf" opgaven opgelost konden worden met transformaties. Waarom Praalder slechts opgaven 10 en 11 oploste met behulp van

[9] [Ceulen, 1596, fol. 68r]
[10] [Praalder, 1790, p. 65]

transformaties blijft onduidelijk.

Praalder introduceert het transformeren anders dan Van Ceulen deed. Na het beantwoorden van opgave 6 maakt Praalder een paar opmerkingen, waarvan de laatste luidt:

> Hier op volgen nu vier byzondere rechtlynighe Figuuren, te weten; een Vierhoek, Vyfhoek, Zeshoek, en Zevenhoek, welke begeerd worden, in een *Quadraat* te veranderen. Deeze hebben geen N°., en schynen van het getal der Voorstellen uitgesloten te zyn; het is nogthans niet waarschynelyk, dat dezelve als een aanhangsel der voorgaande zyn opgegeeven, alzo zy van een gantsch andere Natuur zyn. Wy zullen de wyze aantoonen, hoedanig dit geschied, het geen iemand klaar genoeg zal voorkomen, die zich de 37$^{\text{ste}}$ Prop. I. Boek, en 14 Prop. II. Boek van *Euclides* herinnert.[11]

Praalder geeft zijn lezers een vier-, vijf-, zes- en zevenhoek welke hij transformeert naar vierkanten. Hij zegt dat deze handeling geen nummer gekregen heeft (zoals de opgaven), waardoor ze los staan van de opgaven van Van Ceulen. Dit is in tegenspraak met wat Van Ceulen zei, hij gaf namelijk juist aan dat de theorie van toepassing is op de volgende vijf opgaven. Praalder lijkt niet het verband te zien tussen de theorie en de opgaven 7 tot en met 9.

Er moet opgemerkt worden dat Praalder de veelhoeken naar vierkanten (quadraten) transformeert, terwijl Van Ceulen de veelhoeken naar driehoeken transformeerde. Overigens valt in het eerste citaat van deze paragraaf te lezen dat Van Ceulen veelhoeken wil transformeren in driehoeken of vierkanten. Hoe een veelhoek getransformeerd moet worden naar een vierkant doet hij echter niet voor. Praalder laat slechts zien hoe een veelhoek naar een vierkant getransformeerd moet worden (waarbij een driehoek vinden met gelijke oppervlakte als de veelhoek waarmee werd gestart een deelresultaat is). Doordat Praalder veelhoeken naar vierkanten transformeert in plaats van naar driehoeken, wordt de meetkundige oplossing van opgave 12 onnodig lastig.
Na de bovenstaande passage, volgen de voorbeelden, net zoals Van Ceulen die gaf. Met behulp van drie verwijzingen naar het boek aangeduid met "Meetk." heeft Praalder bewezen dat de vierhoek waarmee hij startte dezelfde oppervlakte heeft als het vierkant welke hij vond door middel van constructie. Van dat resultaat geeft Praalder geen bewijs bij de vijf-, zes- en zevenhoek. Hoe Praalder het vierkant vond met dezelfde oppervlakte als een veelhoek, staat beschreven in subparagraaf 2.2.1. Evenals het bewijs zoals Praalder dat gaf bij het transformeren van een vierhoek naar een vierkant met dezelfde oppervlakte.

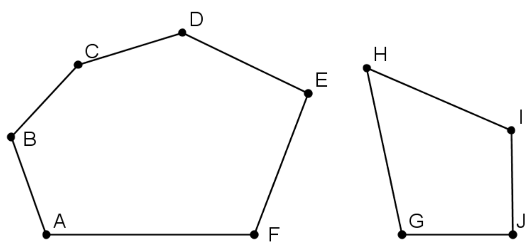
De opgaven 8, 9 en 12 lost Praalder op twee manieren op, eerst algebraïsch, dan meetkundig. In deze opgaven worden lengtes gevraagd van lijnstukken, echter komt er geen getal als antwoord wanneer Praalder deze drie opgaven oplost via constructie. Bovendien gebruikt Praalder niet de kennis over het transformeren van veelhoeken bij de opgaven 8 en 9, daar waar dit zeker wel mogelijk is (zij het de omgekeerde redenering, omdat een vierhoek gevonden moet worden met gelijke oppervlakte als een driehoek). In de volgende subparagraaf zullen

[11] [Praalder, 1790, p. 51]

we vernemen wat de verschillende manieren zijn om opgave 8 op te lossen. Omdat Praalder geen mening geeft over zijn visie op de reden dat de theorie over transformeren vermeld staat tussen opgave 6 en 7, maar ook niet wat zijn visie is aangaande de "volgende vijf" opgaven, weten we niet of Praalder denkt dat opgave 12 bij de "volgende vijf" hoort. Daarom mogen we nog steeds aannemen dat de "volgende vijf" duidt op de opgaven 7 tot en met 11.

Aan hoe Praalder opgave 12 stelt valt nog wat op. Praalder noemt bij het stellen van opgave 12 geen lengtes, dat deed Van Ceulen overigens ook niet. Echter staan er in de begeleidende figuren van Praalder ook geen lengtes genoemd, dit in tegenstelling tot de figuur van Van Ceulen. Aan de lezer van het werk van Praalder wordt op geen enkel moment duidelijk wat de lengtes zijn, tenzij de lezer alle stappen van Praalder napluist. Mogelijk ging Praalder ervan uit dat zijn lezers ook in het bezit waren van de opgaven van Van Ceulen. Maar het is waarschijnlijker dat Praalder simpelweg vergeten is om de lengtes te noemen.

Zoals eerder genoemd gaan opgaven 10 en 11 ook over transformaties van figuren, het zijn zelfs opgaven die enkel om constructie handelen, er worden geen lengtes gegeven of gevraagd. Er wordt gevraagd om een deel van een veelhoek af te snijden met dezelfde oppervlakte als een andere veelhoek. Nemende opgave 10 als voorbeeld, moet er een deel van zeshoek $ABCDEF$ afgesneden worden door een lijn evenwijdig aan BD met dezelfde oppervlakte als vierhoek $GHIJ$, zie figuur 2.5. De zeshoek van Van Ceulen blijkt bij beantwoorden van de opga-



Figuur 2.5: Veelhoeken bij opgave 10

ve onhandig gekozen omdat punten door constructie wel erg dicht bij bestaande punten komen te liggen, waarschijnlijk heeft Praalder daarom een ander figuur gekozen, die niet lijkt op de figuur van Van Ceulen.

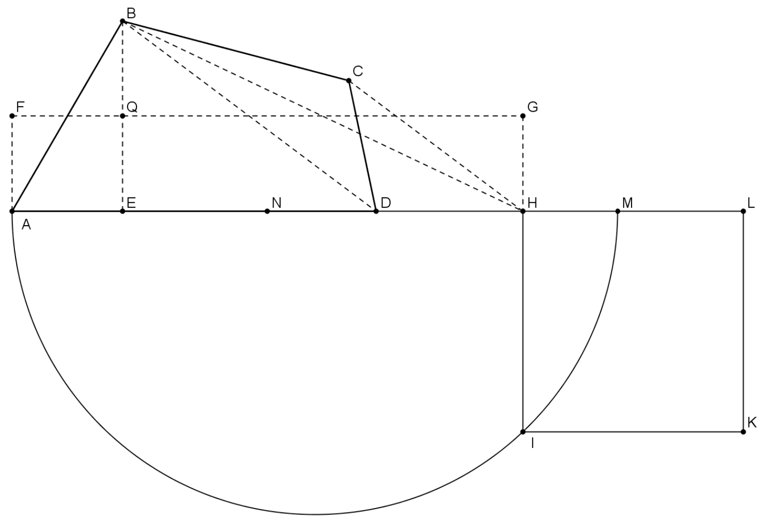
In de figuren van Van Ceulen is in opgave 10 de vierhoek minder hoog dan de zeshoek. Ook in opgave 11 is de vijfhoek minder hoog dan de zevenhoek. Om te laten zien wat er zou gebeuren als de vierhoek hoger zou zijn dan de zeshoek, doet Praalder een voorbeeldconstructie met een veelhoek die hoger is dan de zeshoek. Ook opgave 11 doet hij nog een keer met een vijfhoek die hoger is dan de zevenhoek. Van Ceulen deed dat ook in zijn boek de *Fondamenten*.[12] Het is echter onduidelijk of Praalder dit deed omdat Van Ceulen dit ook deed in de *Fondamenten*, of omdat hij volledig wilde zijn.

[12] [Ceulen, 1615, p. 131]

2.2.1 Praalders transformatie

In deze paragraaf zullen we zien hoe Praalder een willekeurige veelhoek transformeert naar een vierkant. Opmerkelijk is dat Praalder op dezelfde manier als Van Ceulen toe werkt naar een driehoek met dezelfde oppervlakte en dan pas een vierkant maakt, eigenlijk maakt Praalder een extra stap.

Kies vierhoek $ABCD$. Trek de diagonaal BD en trek ook de lijn evenwijdig aan BD door C. Deze zal het verlengde van AD snijden in het punt H. Trek een loodlijn op AD door B, noem het voetpunt E, zie figuur 2.6. Noem het midden van BE Q. Trek een lijn evenwijdig aan AD door Q. De loodlijnen op AH door A en H snijden de lijn evenwijdig aan AD door Q in respectievelijk F en G.



Figuur 2.6: Figuur bij transformatie

Kies het punt M op het verlengde van AH zo dat de lengtes van GH en HM gelijk zijn. Kies N het midden van AM en cirkel om vanuit N door A en M. Laat het verlengde van GH de halve cirkel snijden in het punt I. Kies L op het verlengde van AM zo dat de lengtes HI en HL gelijk zijn. Laat de loodlijnen op HI door I en HL door L elkaar snijden in het punt K. Vierkant $HIKL$ heeft dezelfde oppervlakte als vierhoek $ABCD$.

Laat ons hier bewijzen dat vierkant $HIKL$ inderdaad dezelfde oppervlakte heeft als vierhoek $ABCD$.
Vierhoek $ABCD$ heeft dezelfde oppervlakte als driehoek ABH, zoals we zagen bij de transformatie van Van Ceulen. Rechthoek $AFGH$ heeft half de hoogte van driehoek ABH, daarom hebben deze rechthoek en deze driehoek dezelfde oppervlakte. Om te zien dat vierkant $HIKL$ dezelfde oppervlakte heeft als rechthoek $AFGH$, noemen we lengte AH b en GH h. De oppervlakte van rechthoek $AFGH$ is bh. Dan geldt in driehoek NHI dat lengte NI gelijk is aan $\frac{b+h}{2}$ en lengte $NH = \frac{b-h}{2}$. Met de stelling van Pythagoras zien we dat de lengte

van $HI = \sqrt{bh}$, dus dat de oppervlakte van $HIKL$ gelijk is aan bh. Daarmee is bewezen dat vierkant $HIKL$ dezelfde oppervlakte heeft als vierhoek $ABCD$.

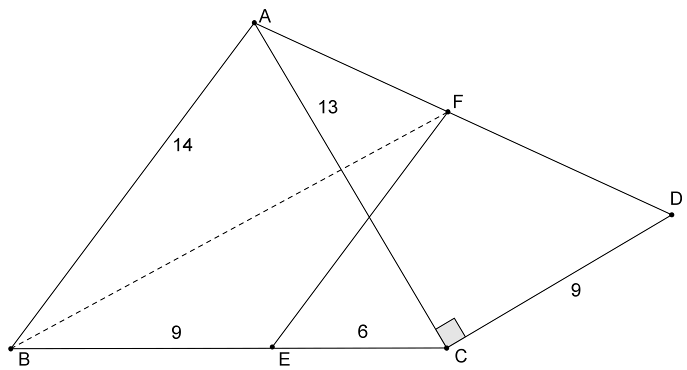
Het bewijs van Praalder is zo goed mogelijk weergegeven in tabel 2.1 (zie figuur 2.6).[13] Het bewijs is kort en krachtig en verwijst naar resultaten in het werk van Strabbe, *Gronden der meetkunst.*

ΔBCD	$= BDH$	*Meetk.* II. 2. *Cor.* 1.	
ΔABD	$= ABD$		
——————— verg.			
$ABCD$	$= \Delta ABH$		
	ΔABH	$= AFGH$	*Meetk.* II. 2. *Cor.* 1,2.
		$AFGH$	$= \square HI$ *Meetk.* IV. 16.
Dienvolgens $ABCD$ ...			$= \square HI$ *Dat te bewijzen was*

Tabel 2.1: bewijs van Praalder

2.2.2 Oplossing van opgave 8

In deze opgave zullen twee oplossingen gepresenteerd worden van opgave 8. Opgaven 7 tot en met 11 dienen opgelost te worden met behulp van transformaties. Er is gekozen om de uitwerkingen van opgave 8 te laten zien omdat deze opgave erg elegant opgelost kan worden met en zonder transformaties. Hoe Praalder deze opgave oploste zonder transformaties en hoe Van Ceulen waarschijnlijk bedoelde dat opgave 8 opgelost had moeten worden, staan in deze paragraaf beschreven. Het is daarvoor wel nodig om resultaten uit opgave 7 te gebruiken, die deelresultaten zullen we kort uitwerken met behulp van gelijkvormige driehoeken.



Figuur 2.7: Figuur bij de opgaven 7, 8 en 9

8. Bekijk vierhoek $ABCD$ met $AB = 14$, $BC = 15$, $AC = 13$, $CD = 9$ en $\angle ACD$ recht. Punt E ligt op BC zo dat $BE = 9$, zie figuur 2.7. Punt F ligt op AD zo dat EF evenwijdig met BA is. Vind een lijnstuk XY evenwijdig aan AB,

[13] [Praalder, 1790, p. 52]

met X op BE en Y op AD, zodanig dat de oppervlakte van ΔABF gelijk is aan de oppervlakte van trapezium $ABXY$. Bereken de lengte van het lijnstuk XY.[14]

Om deze opgave op te lossen langs de weg van Van Ceulen, dus door gebruik te maken van een transformatie, moet er een vierhoek gevonden worden met gelijke oppervlakte als een driehoek. Dat is de omgekeerde bewerking van transformatie zoals hiervoor beschreven werd.
Om op deze manier een oplossing te vinden is het nodig om de lengte EF te weten. Laat ons daarom eerst enkele punten definiëren, zie figuur 2.8. Het snijpunt van de verlengde lijnstukken AD en BC noemen we J, de loodlijnen op BJ uit A noemen we G, uit F noemen we H, uit D noemen we I. Merk op dat de driehoeken AGJ en DIJ gelijkvormig zijn, dit is nodig om lengte BJ te achterhalen, waardoor het mogelijk wordt EF te berekenen uit de gelijkvormigheid $\Delta ABJ \cong \Delta FEJ$.
Uit de eerste gelijkvormigheid volgt dat

$$AG : GJ = DI : IJ. \tag{2.1}$$

Om lengte AG te berekenen, passen we de stelling van Pythagoras toe op de driehoeken ABG en ACG. Dan zien we dat AG^2 gelijk is aan $AB^2 - BG^2$ en aan $AC^2 - GC^2$. Schrijf voor $GC = BC - BG$,

$$\begin{array}{rll} AB^2 - BG^2 & = AG^2 & = AC^2 - (BC - BG)^2 \\ AB^2 - BG^2 & = AG^2 & = AC^2 - BC^2 + 2BC\ BG - BG^2 \\ AB^2 & & = AC^2 - BC^2 + 2BC\ BG \\ \frac{AB^2 - AC^2 + BC^2}{2BC} & & = BG. \end{array}$$

Door het invullen van $AB = 14$, $BC = 15$ en $AC = 13$ vinden we dat $BG = \frac{42}{5}$ en daarmee $AG = \frac{56}{5}$. De lengte van AG kan nu ingevuld worden in vergelijking 2.1.
Schrijf lengte GJ als $BJ - BG$ en IJ als $BJ - 15 - CI$. Vergelijking 2.1 kan nu geschreven worden als

$$\frac{56}{5} : \left(BJ - \frac{42}{5}\right) = DI : (BJ - 15 - CI)\,. \tag{2.2}$$

Merk op dat geldt dat driehoeken AGC en CID gelijkvormig zijn. Daaruit volgt de vergelijking

$$AG : AC = CI : CD.$$

We weten al dat $AG = \frac{56}{5}$, $AC = 13$ en $CD = 9$, dus dat CI gelijk is aan $\frac{504}{65}$. Met dezelfde gelijkvormige driehoeken zien we dat

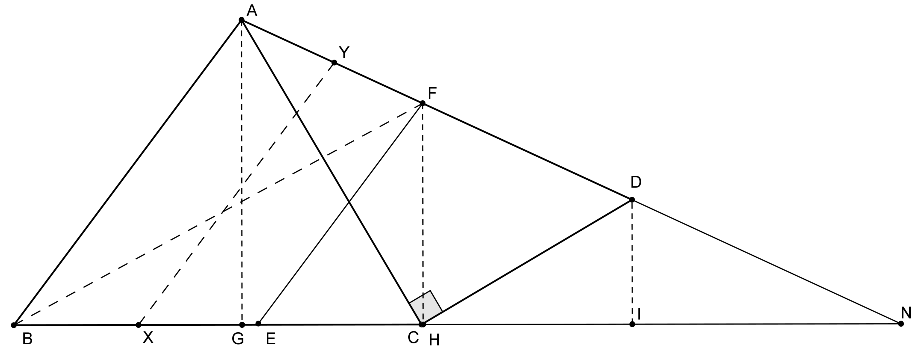
$$AG : GC = CI : DI,$$

dus dat $DI = \frac{297}{65}$. Door nu alle getallen in te vullen in vergelijking 2.2, zien we dat $BJ = \frac{14070}{431}$. Uit de gelijkvormigheid $\Delta ABJ \cong \Delta FEJ$ zien we dat $AB : BJ = EF : EJ$. Schrijf EJ als $BJ - BE$, dan volgt dat

$$EF = \frac{AB\ EJ}{BJ} = \frac{3397}{335}.$$

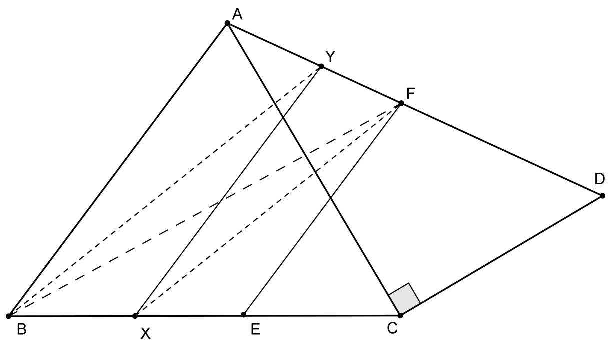
[14] Voor de originele tekst, zie [Ceulen, 1596, fol. 67v]

Aanvullend op de hierboven berekende lengtes gebruikt Praalder de lengte van lijnstuk FH. Die lengte is af te leiden uit de gelijkvormige driehoeken ABG en EFH, dus $FH = \frac{AG\ EF}{AB}$ waarin ons alle lengtes bekend zijn; $FH = \frac{13588}{1675}$.



Figuur 2.8: Figuur van opgave 8, met voetpunten

Hierboven is de lengte EF berekend. Laat ons nu opgave 8 oplossen met behulp van transformatie. Aangenomen dat driehoek ABF gelijke oppervlakte heeft aan trapezium $ABXY$, moet er een transformatie mogelijk zijn van trapezium $ABXY$ naar driehoek ABF, zoals Van Ceulen die bedoelde. Die transformatie gaat als volgt, zie figuur 2.9.
Gegeven trapezium $ABXY$ met AB parallel aan XY. Trek de diagonaal BY en kies de lijn parallel aan BY door X. Het punt waar in deze lijn parallel aan BY door X en het verlengde van AY elkaar snijden noemen we F. Driehoek BXY heeft dezelfde oppervlakte als driehoek BFY. Driehoek ABF heeft dezelfde oppervlakte als trapezium $ABXY$.



Figuur 2.9: Figuur van opgave 8 bij transformatie

In de figuur welke ontstond tijdens transformatie, figuur 2.9 herkennen we onder andere de gelijkvormige driehoeken

$$\Delta ABY \cong \Delta YXF \quad \text{en} \quad \Delta BYX \cong \Delta XFE$$

Daaruit volgt dat

$$XF : BY = XY : AB$$

$$\text{en} \quad XF : BY = EF : XY$$

Dus dat $XY : AB = EF : XY$ en daarmee is XY^2 gelijk aan $AB \times EF$. De lengtes $AB = 14$ en $EF = \frac{3397}{335}$ zijn bekend, invullen levert dat $XY^2 = \frac{47558}{335}$.

Dat is de waarde welke Praalder ook vond. Het is meest waarschijnlijk dat het werk van Van Ceulen hier een zetfout heeft, want er staat $XY^2 = 141\frac{323}{355}$. Een zetfout is erg aannemelijk omdat ons antwoord gelijk is aan $141\frac{323}{335}$ en dit dus enkel 20 verschilt in de deler.

Hieronder zal in andere bewoordingen te lezen zijn hoe Praalder opgave 8 uitwerkte. Dit is een korte uitwerking, maar gebruikt geen transformaties.[15]

De driehoeken BFJ en XYJ zullen dezelfde oppervlakte hebben, want XY moet zo gekozen worden dat de oppervlakte van trapezium $ABXY$ gelijk is aan de oppervlakte ΔABF, zie figuur 2.8. De oppervlakte van $\Delta BFJ = \frac{BJ\ FH}{2}$ en de oppervlakte van ΔABJ is gelijk aan $\frac{BJ\ AG}{2}$. Bekijk nu de oppervlaktes van driehoeken ABJ en XYJ als het product van respectievelijk basises AB en XY en merk op dat hun hoogtes zich verhouden als AB staat tot XY. Daarom verhoudt de oppervlakte ΔABJ zich tot oppervlakte ΔBFJ als AB^2 tot XY^2. Hieruit volgt dat $XY^2 = \frac{AB^2 FH}{AG} = \frac{47558}{335}$.

Voor het resultaat dat de oppervlaktes van de driehoeken ABJ en XYJ zich verhouden tot elkaar als de kwadraten van AB en XY, verwijst Praalder naar een resultaat in *Gronden der Meetkunst*. Opvallend omdat het geen moeite is om aan de lezer duidelijk te maken waarom dat zo is.
Dit is een erg slimme en bondige manier om de opgave te beantwoorden, maar gebruikt niet de theorie over transformaties. Na deze uitwerking beschrijft Praalder hoe deze opgave opgelost kan worden met behulp van meetkunde. Hij doet dat in de volgende passage, merk op dat Praalder geen oplossing geeft.

> Indien dit Voorstel in getallen wordt opgelost, zoals LUDOLF zulks begeert, is hetzelve van weinig belang, gelyk uit de voorgaande Oplossing blykt; en al wierdt dit Meetkunstig geëischt, is de Vraag nogthans niet zwaar, dewyl dezelve dan voornaamelyk hier op uit komt; „Om den Driehoek YXJ zo groot als den Driehoek BFJ, en gelykvormig aan den Driehoek ABJ te maken."[16]

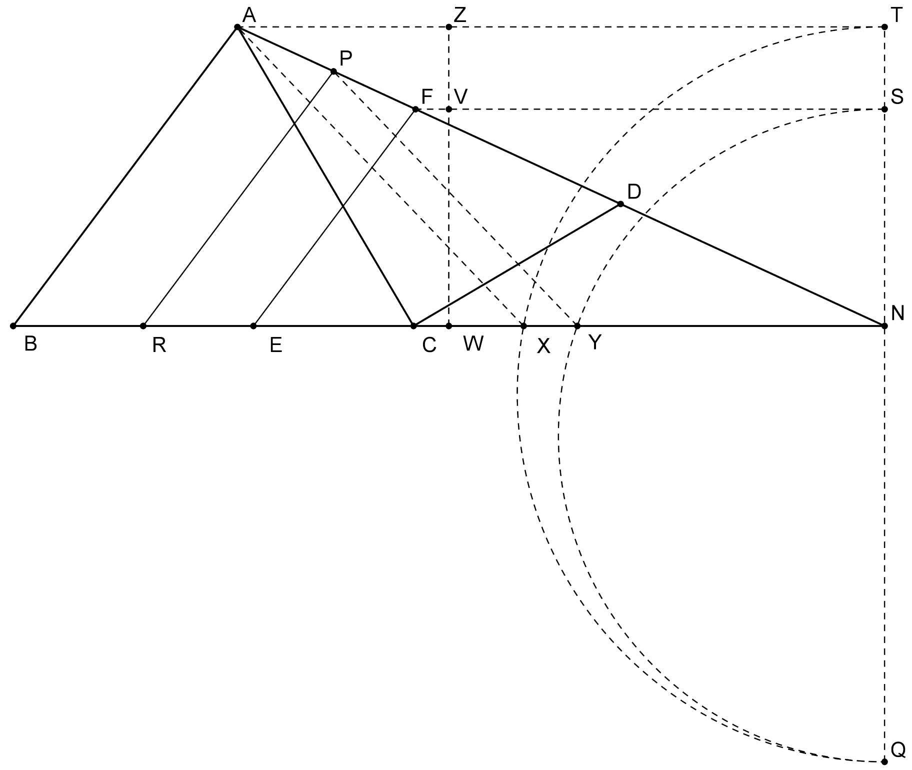
Uit deze aanmerking zouden we ook kunnen concluderen dat Praalder de opgave van Van Ceulen ofwel algebraïsch, ofwel meetkundig wil oplossen. Zoals genoemd in paragraaf 2.1, vindt Praalder niet altijd een antwoord in getallen wanneer hij een opgave oplost. De beschrijving die hij geeft van de meetkundige manier van oplossen bij opgave 8, maakt geen gebruik van transformaties zoals Van Ceulen dat deed en levert ook geen getal als antwoord.

Om meetkundig opgave 8 op te lossen, gaat Praalder als volgt te werk.
Trek uit A en uit F ieders een lijn parallel aan BN, deze lijnen snijden de

[15] [Praalder, 1790, p. 56-57]

[16] [Praalder, 1790, p. 56] De namen van de hoekpunten zijn veranderd door mij, zodat ze overeen komen met de plaatjes in deze scriptie. Voor PRN, BFN en ABN moet respectievelijk gelezen worden YXJ, BFJ en ABJ.

loodlijn op BN in N respectievelijk in T en S en de loodlijn in W (het midden van BN) in respectievelijk Z en V. Merk op dat de oppervlakte van driehoek ABN gelijk is aan de oppervlakte van rechthoek $NTZW$ en de oppervlakte van driehoek BFN gelijk $NSVW$. Om vierkanten te vinden met gelijke oppervlakte aan de voornoemde driehoeken bepalen we allereerst punt Q welke op de loodlijn op BN in punt N bevindt met $|NQ| = |WN|$. Trek de halve cirkels waarvan QS en QT de middellijnen zijn. Deze halve cirkels snijden BN respectievelijk in Y en X. Merk op dat de driehoeken QXT en QYS rechthoekige driehoeken zijn met dezelfde oppervlakte als ΔABN en ΔBFN respectievelijk.[17]
Trek de lijn AX en de lijn uit Y evenwijdig aan AX. Noem het punt waar de



Figuur 2.10: Meetkundige uitwerking van Praalder

laatste lijn AN snijdt P. Trek de lijn uit P evenwijdig aan AB.
Merk op dat de driehoeken AXN en PYN gelijkvormig zijn en zich verhouden als de driehoeken opp ΔABN : opp ΔBFN. Daarom geldt ook de verhouding opp ΔABX : opp ΔPRY, deze zijn bovendien ook gelijkvormig. De lijn PR is de lijn die gevraagd werd.

Het is zeker mogelijk om een getal als antwoord te generen via deze weg van Praalder. Het is mij daarom onduidelijk waarom hij dat niet doet.

[17] Praalder bewijst dit op een erg omslachtige wijze

Hoofdstuk 3

Cossische vergelijkingen

In de dertiende eeuw deden cossische vergelijkingen hun intrede in de westerse wiskunde. Deze cossische vergelijkingen luidden de start in voor de moderne algebra in Europa. Kenmerkend aan cossische vergelijkingen zijn de symbolen die gebruikt werden voor de onbekenden. Tegenwoordig gebruiken wij de letter x voor de onbekende waar in de tijd van Van Ceulen 𝔵 gebruikt werd. Het symbool voor x^2 was 𝔷, en het symbool voor x^3 was 𝔠. Meer over de geschiedenis van cossische vergelijkingen en algebra in het algemeen staat beschreven in paragraaf 3.1.

Er zijn meerdere passages in zowel *Vanden Circkel* als in de *Fondamenten*, waaruit blijkt dat Van Ceulen graag een Coss-boek had willen publiceren. Bijvoorbeeld direct nadat hij opgave 100 stelde:

> Dit Exempel wert konstich door de Quadraet Cos op-ghelost, ende is daerom niet van noode de beantwoordinghe hier te setten. In mijn groote werck sal de maniere van wercken, deser, ende dierghelijcke ghetoont werden, soo verde mijn den Almachtighen Godt verstant ende leven spaert.[1]

Jammer genoeg was het Van Ceulen niet gegund om het betreffende Cossboek te publiceren. Ook al werd na zijn dood de *Fondamenten* gepubliceerd, zoals al werd genoemd in paragraaf 1.1. De cossische bewerkingen waarnaar Van Ceulen in boven gedrukte passage verwijst staan echter niet in de *Fondamenten*, want zelfs in dit werk verwijst Van Ceulen naar het nog te verschijnen boek.[2]

Van de eerste zeventig opgaven van Van Ceulen zijn opgaven 13 tot en met 70 Cossische opgaven. Ze zijn grofweg onder te verdelen in opgaven over machten van rationale getallen, rijen, driehoeksgetallen, sommen die oplosbaar zijn zonder machten hoger dan 2 en derdegraadsvergelijkingen. Deze onderwerpen staat beschreven in de paragrafen 3.3 Machten van rationale getallen, 3.4 Rijen, 3.4.2 Driehoeksgetallen en 3.2 Derdegraadsvergelijkingen.

[1] [Ceulen, 1596, fol 72v]
[2] [Vlek, 2008, p. 45-46]

3.1 Regula Coss

In deze paragraaf staat in het kort beschreven de geschiedenis van het aanduiden van variabelen door letters. Die geschiedenis gaat ver terug en is zelfs terug te leiden tot de Hindu-Arabische tradities met betrekking tot de wiskunde. De Islamitische wiskundige al-Khwārizmī (circa 780-850) legde in zijn werk *Hisāb al-jabr wa'l-muqābala* veel wiskunde vast. Er valt te lezen dat men de uitdrukkingen shay', māl en ka'b gebruikte voor wat wij aanduiden met respectievelijk x, x^2 en x^3. Deze woorden betekenen respectievelijk ding/iets, rijkdom/bezit en kubus. Pas in de twaalfde eeuw werd Moslim algebra bekend in het westen toen Robert van Chester dit werk van al-Khwārizmī vertaalde. De woorden voor de onbekenden werden ook vertaald naar het Latijn en werden respectievelijk res/radix/pars, census/avere en cubus genoemd. Ook hogere machten kregen een naam, x^4 heette census de censu/censuum census en x^6 heette cubus cubi.[3]
Het begin van moderne algebra werd in gang gezet door Leonardo van Pisa[4] toen hij zijn boek *Liber Abbaci* schreef in 1202. Tijdens de economische revolutie in Italië in de dertiende eeuw floreerde de academische wereld enorm en er werd een nieuwe wetenschap bedreven op de zogenoemde abbaci scholen, vernoemd naar het boek *Liber Abbaci*. Leerlingen van deze scholen leerden in het Italiaans en konden vermoedelijk ook geen Latijn lezen. Zij kwamen in veel verschillende sectoren terecht, als koopman, cartograaf, artiest of architect. In de boeken voor deze studenten, geschreven in het Italiaans, werd het Latijnse woord res vertaald naar het italiaanse cosa en de kunst van het rekenen met cosa heette regola della cosa.[5] De tweede en derde macht van cosa werden ciensi en chubo genoemd.[6]
In de Dresden Codex C 80 op fols. 368r-378v[7] staan voor de waarden x, x^2, x^3 en x^4 respectievelijk de symbolen , , en . Pas langzamerhand is men gaan werken met machten van de letter x, zoals nu gebruikelijk is.

De term algebra is een verbastering van het begrip al-jabr, wat restauratie betekent.[8] Het begrip al-jabr is deel van de titel van het werk van al-Khwārizmī. Het woord algoritme is een verbastering van al-Khwārizmī.[9]

3.2 Derdegraadsvergelijkingen

Zes opgaven tussen opgave 13 en 23, zijn te herleiden tot derdegraadsproblemen. Deze zijn in de regel niet direct oplosbaar. Er is wel een algemene oplossingsmethode, namelijk die van Cardano. In het jaar 1545 verscheen het boek *Ars magna* van de hand van Cardano. Dit boek bevat een algemene oplossingsmethode voor derdegraadsvergelijkingen, zonder gebruik te maken van een benadering. Bovendien werd aan dit boek een methode toegevoegd waarop een vierdegraadsvergelijking gereduceerd kan worden tot een derdegraadsvergelijking met dank

[3] [Reich, 2002, p. 192]
[4] Beter bekend onder de naam Fibonacci, [Grattan-Guinnes, 1997, p. 140]
[5] [Reich, 2002, p. 192-193]
[6] [Grattan-Guinnes, 1997, p. 144]
[7] [Reich, 2002, p. 196]
[8] [Grattan-Guinnes, 1997, p. 117]
[9] [Grattan-Guinnes, 1997, p. 118]

aan Lodovico Ferrari (1522–1569).[10] Oplossingen van derdegraadsvergelijkingen met behulp van de methode van Cardano, zijn in veel gevallen complexe getallen. Soms is het mogelijk om een dergelijk complex antwoord te herleiden tot een irrationaal getal. Daarbij moet aangetekend worden dat na het verschijnen van *Ars Magna* men langzaam begon met het erkennen van negatieve getallen als oplossing en het rekenen met negatieve wortels, daarvan was Bombelli (1526–1572) een voorganger.[11] Algebra is heel lang de studie geweest naar vergelijkingen met gehele getallen of breuken als uitkomst. Andere antwoorden werden lange tijd genegeerd door vroege westerse wiskundigen. Vanaf de dertiende eeuw werd er door sommige wiskundigen geëxperimenteerd met negatieve getallen als antwoord op opgaven door bijvoorbeeld Leonardo van Pisa in zijn boek *Liber Abbaci*. Italiaanse wiskundigen in de veertiende eeuw gaven een betekenis aan negatieve uitkomsten, namelijk een tekort (geld). Cardano maakte een onderscheid tussen "echte oplossingen" en "fictieve".[12] Ook irrationale getallen waren nog geen algemeen goed. Van Ceulen gebruikte wel irrationale getallen (zie ook paragraaf 2.1), de laatste woorden over het bestaansrecht van deze getallen waren echter nog lang niet gesproken.[13] Hoe de algemene oplossingsmethode van Cardano voor derdegraadsvergelijkingen gaat, zal beschreven worden in paragraaf 3.2.1. In dezelfde paragraaf vanaf pagina 35 wordt opgave 84 bekeken, opgave 84 kan worden herleid tot een derdegraads probleem en met de methode van Cardano algebraïsch worden opgelost.
De andere opgaven van Van Ceulen over derdegraadsvergelijkingen zullen worden besproken in paragraaf 3.2.2.

3.2.1 De methode van Cardano en Ferrari

Derdegraadsvergelijkingen zijn oplosbaar in irrationalen, zoals Cardano (1501-1676) beschreef in zijn *Ars Magna* in 1545.[14] Zoals eerder genoemd, bevat dit boek ook een methode om een vierdegraadsvergelijking te reduceren tot een derdegraadsprobleem. Hoe een vierdegraadsvergelijking algebraïsch opgelost kan worden zal niet worden besproken, maar wel hoe een derdegraadsvergelijking algebraïsch opgelost kan worden. Hoe dat moet zal hier beschreven worden op de moderne wijze met veel variabelen en constanten. Cardano gebruikte de representatie van een balk (zie figuur 3.2.1 voor de figuur die hoort bij $(u+v)^3$).

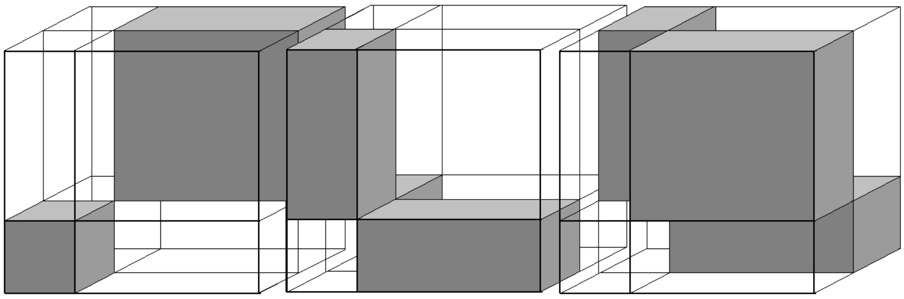
Cardano maakte van een standaard derdegraadsvergelijking ($x^3+ax^2+bx+c=0$) eerst een vergelijking waarin de tweedegraadsterm wegvalt ($y^3+py+q=0$) door de substitutie $x=y-\frac{a}{3}$ te maken. Stel vervolgens dat $y=u+v$, dan is y^3 gelijk aan

$$u^3+v^3+3uv(u+v).$$

Als we aannemen dat $u^3+v^3=-q$ en $3uv=-p$, dan zien we dat $y^3=u^3+v^3+3uv(u+v)=-q-py$ wat niets anders is dan de derdegraadsvergelijking $y^3+py+q=0$.
We kunnen u uitdrukken in p en v omdat we stelden dat $3uv=-p$;

$$u=-\frac{p}{3v}.$$

[10] [Bewersdorff, 2006, p. 23-24]
[11] [Bos, 2000, p. 234]
[12] [Pycior, 1997, p. Opzoeken!]
[13] [Bos, 2000, p. 137-141]
[14] [Bewersdorff, 2006]



Figuur 3.1: $u^3 + v^3$ en $3u^2v$ en $3uv^2$ maken samen $(u+v)^3$

Laat ons deze u invullen in $u^3+v^3 = -q$, dan geldt dat $-\frac{p^3}{27v^3}+v^3 = -q$. Noem hierin $v^3 = w$, dan kunnen we de laatste vergelijking ook opschrijven als

$$w^2 + qw - \frac{p^3}{27} = 0.$$

Hieruit kan w worden opgelost.

$$w = -\frac{q}{2} \pm \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}$$

We kozen $v^3 = w$, om v te bepalen nemen we de derdemachtswortel van w;

$$v = \sqrt[3]{-\frac{q}{2} \pm \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}}.$$

Eerder kozen we $u = -\frac{p}{3v}$. Door v in te vullen in de vergelijking van u, ontstaat er een breuk waarvan de noemer een derdemachtswortel is.

$$u = -\frac{-p}{3\sqrt[3]{-\frac{q}{2} \pm \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}}}$$

Door teller en noemer van u te vermenigvuldigen met $\sqrt[3]{-\frac{q}{2} \mp \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}}$, volgt dat

$$u = -\frac{p}{3}\frac{\sqrt[3]{-\frac{q}{2} \mp \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}}}{\sqrt[3]{-\frac{p^3}{27}}} = \sqrt[3]{-\frac{q}{2} \mp \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}}.$$

Het getal $y = u + v$ is een oplossingen van de derdegraadsvergelijking $y^3 + py + q = 0$. We stelden dat $x = y - \frac{a}{3}$, dus door $\frac{a}{3}$ af te trekken van y, hebben we een oplossing x van de oorspronkelijke derdegraadsvergelijking.

Deze methode lijkt niet te werken bij dedegraadsvergelijkingen met drie nulpunten, er wordt dan namelijk een complexe y gevonden. We kunnen deze bewering aantonen.

Als we aannemen dat er drie reële nulpunten zijn, is de vergelijking $y^3+py+q=0$ ook te schrijven als $(y-r)(y-s)(y-t)=0$. Laten we p en q uitdrukken in s en t. Door $(y-r)(y-s)(y-t)=0$ uit te schrijven, vinden we de gelijkheid

$$y^3+py+q = y^3-(r+s+t)y^2+(rs+st+rt)y-rst.$$

Deze vergelijking moet waar zijn voor alle waarden van y, dus moet gelden dat

$$r+s+t=0,\ rs+st+rt=p \text{ en } -rst=q.$$

Aangenomen dat u complex is, moet gelden dat $\frac{q^2}{2}+\frac{p^3}{27}<0$. Deze ongelijkheid kan ook geschreven worden afhankelijk van s en t; er moet dan gelden dat

$$-\frac{1}{108}(s-t)^2(s+2t)^2(2s+t)^2<0.$$

Omdat s en t reële getallen zijn is dit waar. Slechts dan als s en t complex zijn, zal $\frac{q^2}{2}+\frac{p^3}{27}\geq 0$ (het kan niet zo zijn dat slechts één van beide complex is). Wanneer u complex is, dan ook v. Het is niet altijd even goed te zien dat $y=u+v$ toch echt een reëel getal zal zijn, het is wel mogelijk om het complexe getal te herschrijven waardoor het complexe deel tegen elkaar weg valt. Er is echter geen algemene methode om y reëel te schrijven en daarmee moeten dus ook veel pogingen gedaan worden.

Oplossing van opgave 84

Opgave 84 is een bijzondere opgave omdat Van Ceulen enkel op deze opgave een antwoord geeft welke gevonden is met de methode van Cardano en Ferrari. Er zijn meer opgaven die opgelost kunnen worden door het oplossen van een derdegraadsvergelijking, maar hier geeft Van Ceulen of geen antwoord bij of een numeriek antwoord (zie ook paragraaf 3.2.2). Laat ons kijken hoe Van Ceulen opgave 84 stelde en wat hij vervolgens meldde over de oplossing ervan.

> 84. . Een Coopman handelt, wint met 100 halff soo veel lb. hy int beghin heeft: Handelt wijder met den gewin alleen, wint met 100 thien min als syn eerste Capitael. Het wert bevonden, dat den lesten gewin, eñ syn eerste Capitael t'samen 300 lb. bedraeght. *Vraghe*, Naer syn eersten Capitael? *Antvvoordt.* $148\frac{2082025547}{10000000000}$ lb. meer, ende minder als $148\frac{2082025548}{10000000000}$ lb.. Alsmen hier set voor syn eerste Capitael $1\mathcal{R}$, ende werckt naert behooren, Comt $1\mathcal{C}+20000\mathcal{R}$, ghelijck $10\mathfrak{z}+6000000$. De waerde van $1\mathcal{R}$ hebbe ick door mijn generale reghel ghevonden: Doch die lust heeft het Facit te soucken in Irrationale ghetallen, sal vinden $\sqrt{\mathcal{C}\sqrt{9096148148148\frac{4}{27}}+2966703\frac{19}{27}}-\sqrt{\mathcal{C}\sqrt{9096148148148\frac{4}{27}}-2966703\frac{19}{27}}+3\frac{1}{3}$[15] voor het eerste Capitael, welck Rationael ghemact sal comen als boven, welck Rationale mijn dient tot de proeve, eñ het ongeschickte niet.[16]

[15] Wat Van Ceulen aanduidde met $\sqrt{\mathcal{C}}$, wordt tegenwoordig aangeduid met $\sqrt[3]{\ }$.
[16] [Ceulen, 1596, fol 71r]

Van Ceulen vraagt hier naar het eindkapitaal van een koopman die begint met handelen en een winst per 100 ponden maakt van de helft van het startkapitaal. Met enkel de winst handelt de koopman veder. Hij maakt een winst per 100 pond van 10 pond minder dan het startkapitaal. Nu de koopman twee maal winst behaald heeft, is de vraag wat zijn eindkapitaal is.
Net als Van Ceulen nemen we het startkapitaal gelijk aan x ponden. Met dit kapitaal gaat de koopman handelen. Hij wint per honderd pond half zo veel pond als hij inzette. Dus per 100 pond is de winst $\frac{x}{2}$. Echter zette de koopman niet 100 pond in, maar x pond. Dus de winst bedraagt $\frac{x^2}{200}$. Met dit bedrag handelt de koopman verder en geniet een winst per 100 pond van 10 minder dan zijn startbedrag. Dus per 100 pond wint de koopman $x-10$ pond, echter was de inzet niet 100, maar $\frac{x^2}{200}$ pond. De winst die de koopman heeft is daarom $\frac{x^2(x-10)}{20.000}$. Het kapitaal van de handelaar is nu in totaal 300 pond. Bereken het startkapitaal. Startkapitaal x moet voldoen aan de volgende vergelijking: $x + \frac{x^2(x-10)}{20.000} = 300$. Deze vergelijking schrijven we om naar $20.000x + x^3 - 10x^2 = 6.000.000$, we hebben dezelfde vergelijking gevonden als Van Ceulen. De benadering die Van Ceulen vond klopt. Laat ons nu het irrationale antwoord zoeken met de methode van Cardano.

De vergelijking waar we mee zullen werken is $x^3-10x^2+20.000x-6.000.000 = 0$. Deze kunnen we substitueren zo dat de tweedegraadsterm wegvalt. Daarvoor kiezen we $x = y + \frac{10}{3}$. De vergelijking wordt dan

$$y^3 + \frac{59900}{3}y - \frac{160202000}{27} = 0.$$

We willen y gaan schrijven als $u + v$, met v zoals in paragraaf 3.2.1. Hierin is $q = -\frac{160202000}{27}$ en $p = \frac{59900}{3}$. Invullen leert ons dat

$$v = \sqrt[3]{2966703\frac{19}{27} + \sqrt{9096148148148\frac{4}{27}}},$$

invullen in $x = u + v + 3\frac{1}{3}$, levert

$$\sqrt[3]{2966703\frac{19}{27} + \sqrt{9096148148148\frac{4}{27}}} + \sqrt[3]{2966703\frac{19}{27} - \sqrt{9096148148148\frac{4}{27}}} + 3\frac{1}{3}.$$

Dit is hetzelfde antwoord als wat Van Ceulen ons gaf, slechts anders geschreven.

3.2.2 Derdegraadsvergelijkingen

Ondanks dat de derdegraadsvergelijkingen welke tussen de eerste zeventig opgaven staan op te lossen zijn met de methode van Cardano, lost Praalder geen van deze zo op. Al deze zes opgaven lost hij op door een geheel getal $-4 \leq p \leq 3$ te vinden welke oplossing is van de vergelijking en deze oplossing weg te delen (dus delen door $x - p$). Er blijft een tweedegraadsvergelijking over ($ax^2 + bx + c = 0$)

waaruit gegarandeerd de andere twee oplossingen gevonden kunnen worden zolang $b^2 - 4ac > 0$.
Van Ceulen vond een opgave opgelost als hij de kleinste positieve oplossing gevonden had, getuige de oplossingen die hij vaak vermeldde direct na het stellen van de opgave. Die antwoorden zijn vrijwel altijd het kleinste positieve antwoord. Uitzondering zijn de opgaven 37 tot en met 39, omdat deze opgaven geen positieve oplossingen hebben. Van Ceulen zei hierbij dan ook dat hij de opgaven vreemd vond, zie paragraaf 3.4.3. Bij alle zes derdegraadsvergelijkingen echter, is de gehele oplossing, p, ofwel negatief, ofwel groter dan de kleinste positieve oplossing. Wat Praalder een oplossing vond wordt niet duidelijk uit zijn uitwerkingen bij deze derdegraadsvergelijkingen, hij geeft meermalen aan dat hij hetzelfde vond als Van Ceulen en besluit daarmee zijn uitwerking. Hoe Praalder verklaarde dat Van Ceulen negatieve antwoorden niet als normale antwoorden beschouwt, gaan we zien in paragraaf 3.4.3. In paragraaf 4.1 zullen we zien dat Praalder mogelijk een verkeerde verklaring geeft aangaande negatieve oplossingen.

Het is lange tijd traditie geweest om collega wiskundigen uit te dagen door moeilijke opgaven aan elkaar op te sturen. Daarmee kon de eigen kundigheid gedemonstreerd worden, maar was ook een manier om meer te leren van de oefening maar ook elkaars uitwerkingen. Zoals Van Ceulen zelf bij sommige opgaven meldt,[17] stuurden collega wiskundigen ook aan hem opgaven. Het is goed voor te stellen dat de zes bovengenoemde opgaven van oorsprong tweedegraadsvergelijkingen waren, vermenigvuldigd met een factor $x - p$, voor een gehele waarde van p, om de uitdaging voor een collega wat groter te maken.

Het staat niet vast of Van Ceulen graag had gezien dat zijn lezers sommige van de zes opgaven via de methode van Cardano opgelost hadden. Maar dat Praalder al deze opgaven oplost door de voornoemde oplossing weg te delen, is misschien ook niet de opzet van Van Ceulen geweest. Het is in ieder geval wel noemenswaardig dat Praalder niet eens aantekening maakte van de oplosbaarheid via de weg van Cardano. Te meer omdat die oplossingsmethode actueel was, hij staat in de eerste editie van *Oeffenschool der Mathematische Weetenschappen* (zie hoofdstuk 5).
Een wiskundig probleem van hogere graad, welke Van Ceulen opstelde, werd door de Belgische wiskundige Michiel Coignet (1549–1623) opgelost via de methode van Cardano[18], zoals Coignet schreef in een brief aan Galileo Galilei (1564–1642), gedateerd 31 maart 1588.[19] De methode van Cardano en Ferrari werd dus wel degelijk als oplossingsmethode gebruikt door collega wiskundigen van Van Ceulen. In zijn werk *Vanden Circkel* wordt duidelijk dat Van Ceulen de methode van Cardano kende en kon toepassen getuige de begeleidende tekst bij opgave 84. Deze vierentachtigste opgave is op te lossen met een derdegraadsvergelijking welke slechts één nulpunt heeft. Zoals we in de vernamen in paragraaf 3.2.1, volgt direct een irrationaal antwoord. De zes opgaven tussen de eerste zeventig opgaven welke oplosbaar zijn via een derdegraadsvergelijking, hebben allemaal drie nulpunten, dus volgt een complex antwoord via de methode van Cardano (zie paragraaf 3.2.1). Een dergelijk complex antwoord is te herleiden

[17] Bijvoorbeeld bij de opgaven 37 tot en met 40, [Ceulen, 1596, fol 69r]
[18] Het handelt hier niet om één van de 100 opgaven uit *Vanden Circkel*.
[19] [Katscher, 1979, p. 109]

tot een irrationaal antwoord, dat vereist echter extra rekenwerk zonder garantie op het vinden van het irrationale antwoord.

3.3 Machten van rationale getallen

Bij twintig opgaven van Van Ceulen tussen de opgaven 24 en 70 wordt gevraagd naar rationale oplossingen van hogeregraadsvergelijkingen. Bijvoorbeeld opgave 27:

> 27. . Souckt twee ghetallen, soo men tot des grootsten *Cubo* Addeert der cleynsten Quadraet, dat come een Rationael *Cubo*, een slechte saecke.[20]

In deze opgave wordt gevraagd naar twee getallen a en b met $a < b$ te vinden waarvoor geldt dat $\sqrt[3]{b^3 + a^2} \in \mathbb{Q}$. Van Ceulen voegt hieraan toe dat de opgave gemakkelijk is, getuige de woorden „een slechte saecke". Hier heb ik verondersteld dat „Rationael Cubo" betekent: de derde macht van een rationaal getal ($b^3 + a^2 = c^3,\ c \in \mathbb{Q}$). En niet een rationale derdemacht ($b^3 + a^2 = c,\ c \in \mathbb{Q}$). Want als er geen voorwaarde wordt gedaan aan de derdemachtswortel van $b^3 + a^2$ met a en $b \in \mathbb{Q}$ voldoet $b^3 + a^2 = c$ met $c \in \mathbb{Q}$ altijd. Wanneer men ongeoefend is in het oplossen van dit soort opgaven is dit helemaal niet een gemakkelijke opgave. Sterker nog, sommige van dit soort opgaven zijn erg lang onopgelost gebleven, zoals de zestiende opgave van Diophantes. Opgave 57 van Van Ceulen is dezelfde als die opgave van Diophantes. Van Ceulen kon deze opgave oplossen, dat is ons bekend omdat hij de uitwerking schreef in een brief aan N. Huybertszoon van Percyn. Van Ceulen schreef die brief in het jaar 1610, diezelfde brief werd gepubliceerd in het boek *Toet-steen van d'Algebra Spetiosa*[21] in het jaar 1669. Praalder haakt gretig in op de uitwerking van Van Ceulen in die brief, maar vooral ook op het commentaar van Abraham de Graaf op de uitwerkingen van Van Ceulen en andere wiskundigen. De uitwerking zoals Van Ceulen en Praalder die gaven, zal worden weergegeven in paragraaf 3.3.1. De opgave luidt:

> 57. . Vindt dry ghetallen, Alsmen van *Cubo* haerder summa Substraheert elck getal insonderhyt, dat restē dry Rationale *Cubic* getallē. *Antvvoort* $\frac{494424}{}\frac{/472696}{2352637}\frac{/448000}{\text{gemeeneNom.}}$. Ofte $\frac{466607104}{}\frac{/346734792}{1976656375}\frac{/408877504}{\text{gemeeneNom.}}$. De eerste dry ghetallen doen t'samen gheaddeert $\frac{80}{137}$, De ander dry doen t'samen gheaddeert $\frac{776}{1255}$, is licht te proeven. Dit is een konstighe Vraghe, ende voor veel jaren ghedichtet door den seer hervaren *Diophanti*: Maer niet ghesolveert, vermagh veel Facits: Maer een te vinden is konst, hoe ick die door Cos ghevonden hebbe, sal in mijn groote werck ghevonden werden.[22]

Merk op dat Van Ceulen hier ook verwijst naar het Coss-boek welke hij nog wilde schrijven. Echter verscheen zijn uitwerking van deze opgave eerder dan het boek, zij het niet geheel vrijwillig. Van Ceulen onderwees de uitwerking van

[20] [Ceulen, 1596, fol 68v]
[21] zie [Twilt, 1669, p. 50-52]
[22] [Ceulen, 1596, fol 69v]

opgave 57 tegen betaling aan collega wiskundigen en vroeg hen de uitwerking geheim te houden, iemand heeft echter zijn belofte niet gehouden, waardoor Van Ceulen zich niet meer genoodzaakt zag de uitwerking geheim te houden. Dat staat te lezen in zijn brief aan N. Huybertszoon van Percyn, welke afgedrukt is in *Toet-steen van d'Algebra Spetiosa*:

> [...] ik hebbe die een ander geleert die my daar van rijkelijk betaalt heeft, maar heeft sijn beloften niet gehouden, dat is, hy beloofde my die niemant te sullen leeren, soo lange mijn groot werk niet gedrukt was, daar in ik de Lief-hebbers de voornoemde Questie gesolveert voor-dragen soude, maar heeft in tegendeel een wijl tijdts daar na de voornoemde Questie aan een ander geleert, die hem daar na tegen alle waarhyt beroemde, de Solutie door sich selven gevonden te hebben, wat arbeydt ik daar aan gedaan heb is Godt bekent [...][23]

Alvorens de opgave op te lossen zegt Praalder het volgende.

> Niettegenstaande nu DE GRAAF zegt, dat deeze Questie nooit volkomen gesolveerd is, noch door *Diophantes*, noch door anderen, maar alleen door *Adrianus Twilt*, komt my zulks nogthans zeer onwaarschijnlijk voor; want LUDOLF geeft op dit Voorstel voldoende antwoorden, die waarlijk niet radender wijze; maar volgens een Wiskunstige manier gevonden zijn.[24]

Praalder geeft aan zijn lezers de manier van oplossen die Van Ceulen zelf hanteerde. Afsluitend over deze manier van oplossen zegt hij het volgende:

> Het blykt nu klaar, dat deeze manier van Ontbindinge zeer moeyelyk is, en een groot vooruitzigt vereischt, ook tevens niet algemeen is, om andere getallen te bekomen; schoon nu hier nog een ander antwoord kan gevonden worden, dunkt my nogthans, dat het de moeite niet waard is, om dat zelve op te zoeken, te meer, om dat ik dit Voorstel volledig, en algemeen, zal oplossen, en dat op zulk een wyze, die ik vertrouwe, zeer kort, duidelyk, en zo algemeen te zyn, dat ze tegen alle andere Ontbindingen mag gesteld worden.[25]

Hier schrijft Praalder dat hij niet blij is met deze manieren van oplossen, het is hem niet algemeen genoeg. Dit is in tegenspraak met wat Praalder eerder zei, namelijk dat de manier van Van Ceulen juist algemeen moet zijn geweest. Bovendien heeft Praalder de uitwerking van Van Ceulen slechts lichtelijk aangepast, waarmee hij niet aantoont dat Van Ceulen een algemene oplossingsmethode had, maar wel dat hij de methode van Van Ceulen kan reproduceren. Praalder had kunnen laten zien dat het erg aannemelijk is dat Van Ceulen op een soortgelijke manier als Praalder zijn tweede antwoord produceerde. Dat deed Praalder echter niet, terwijl hij het tweede antwoord van Van Ceulen wel kende.[26] Hierop volgt een tweede manier van oplossen, welke Praalder algemeen en volledig noemt. Deze manier van oplossen is vrijwel identiek aan de manier

[23] [Twilt, 1669, p. 50]
[24] [Praalder, 1790, p. 158]
[25] [Praalder, 1790, p. 161]
[26] [Praalder, 1790, p. 156-157]

van De Graaf in *Inleyding tot de wiskunst*.[27] Het verschil tussen de uitwerking van Praalder en De Graaf zit hem erin dat Praalder drie coëfficiënten nodig heeft en De Graaf negen. De twee manieren van oplossen worden besproken in paragraaf 3.3.1.

Nadat Praalder beide manieren van oplossen uitgewerkt heeft, laat hij zien hoe je vier en daarna vijf van zulke getallen als in opgave 57 kunt vinden.[28] Waarschijnlijk deed Praaler dat omdat opgave 69 van Van Ceulen vraagt naar vier getallen zoals in opgave 57. In totaal besteed Praalder 15 pagina's (inclusief voetnoten) aan opgave 57, hun twee oplossingen en twee uitbreidingen. Bijzonder aan de voetnoten is dat in de hoofdtekst te lezen staat dat Praalder nooit het traktaatje van Twilt gelezen heeft, maar wel de volledige uitwerking van Van Ceulen in de voettekst staat. Een andere voettekst gaat als volgt:

> *Dit Tractaatje, dat de Heer Praalder zegt nooit gezien te hebben, zie de volgende* III. Aanmerking, *is door* Dirk de Hollander *in 't licht gebragt* [...]

Hoe het geduid moet worden dat Praalder in zijn eigen werk aangeduid wordt in de derde persoon zal besproken worden in hoofdstuk 5.

Praalder stopte veel tijd en energie in deze oplossing. Dat deed hij volgens eigen zeggen om de volgende reden:

> Ik heb nooit het groote Werk van Ludolf[29], noch ook nooit het Tractaatje van Twilt gezien. Alles wat ik van het laatste kan zeggen, is volgens het getuigenis van A. De Graaf, bij de boven aangehaalde Oplossing van deeze Vraag, in het 30$^{\text{ste}}$ Voorstel[30] van zijne *Inleiding tot de Wiskunst*. Dewijl nu aldaar van verscheide wegen van Oplossingen gemeld wordt, die in het gemelde Tractaatje te vinden zijn, zo heeft mij dit aangezet, om ook een andere wyze van Ontbindinge na te speuren, eensdeels, om die gemakkelijker en eenvouwdiger te hebben; en ten anderen, om ook die *Calculatie* te ontgaan, tusschen welke paalen de bekende *Termen* moeten genomen worden, om voldoende antwoorden te hebben; en eindelijk, om tevens een weg te baanen, waar door niet alleen drie zulke Getallen, maar ook zo veel getallen van die natuur, als men begeert, kunnen gevonden worden.[31]

Praalder zegt hiermee dat hij verschillende manieren van oplossen gezien heeft en er zelf één aan toe wilde voegen waarbij het niet meer nodig is om uit te rekenen tussen welke waarden de variabelen mogen gekozen worden. Bovendien wilde Praalder ook zo algemeen zijn dat er zo veel oplossingen gevonden kunnen worden als gewenst is. Opvallend is dat Praalder bij deze oplossingsmethode echter toch voorwaarden stelt aan de variabelen b, c en e.

[27] [Graaf, 1706]

[28] [Praalder, 1790, p. 165-169]

[29] In de originele tekst staat hier een voetnoot, de duiding van de voetnoten in de tekst van Praalder staan beschreven in hoofdstuk 5

[30] Na bestudering van het betreffende boek van A. de Graaf, blijkt dat dit het 330$^{\text{ste}}$ voorstel moet zijn, [Graaf, 1706, p. 341].

[31] [Praalder, 1790, p. 162]

De Graaf is het niet gelukt om een algemene oplossing te vinden met slechts de variabelen a tot en met e. Om tot een oplossing te komen heeft hij de letters a tot en met i nodig. De Graaf vindt daarmee de getallen $\frac{26718104}{153212175}$, $\frac{31909696}{153212175}$ en $\frac{37820580}{153212175}$, welke anders zijn dan de twee antwoorden van Van Ceulen. Sterker nog, dit antwoord is niet te vinden via de eerste methode van Praalder. Om andere getallen te vinden hoeven enkel andere getallen g en f te worden ingevuld, echter zijn er beperkende voorwaarden tussen welke waarden g en f gekozen mogen worden.[32] De Graaf beweert dat tot nog toe niemand een algemene oplossing gevonden heeft, ook Van Ceulen niet, behalve Arianus Twilt.[33] Of de manier van oplossen die De Graaf hier gegeven heeft gelijk is aan de manier van oplossen door Adrianus Twilt is onduidelijk.

Om opgave 61 op te lossen introduceert Praalder een Lemma en bewijst deze ook.[34] De Graaf stelde ook een Lemma toen hij opgave 314 in zijn werk *Inleiding tot de wiskunst* op lost, welke dezelfde opgave is als opgave 61 van Van Ceulen.[35] Opmerkelijk is dat Praalder het Lemma juist andersom bewijst dan hij gesteld is. Overigens is het Lemma zoals De Graaf hem stelde en bewees nog veel onduidelijker.

Lemma 1 *Als het verschil van twee rationale kwadraten geschreven kan worden als het product van twee rationale delers, zo dat de halve som van de delers gelijk is aan de wortel van het grootste kwadraat, dan is het halve verschil van de twee delers gelijk aan de wortel van het kleinste kwadraat.*

Bewijs van Praalder Laat $a^2 + 2ab + b^2$ en $a^2 - 2ab + b^2$ de twee rationale kwadraten zijn, dan is het verschil van de twee kwadraten $4ab$. Dat is te splitsen in de delers $2a$ en $2b$. De halve som is gelijk aan de wortel van het grootste kwadraat ($a+b = \sqrt{a^2 + 2ab + b^2}$), daarom zal het halve verschil gelijk zijn aan de wortel van het kleine kwadraat ($a - b = \sqrt{a^2 - 2ab + b^2}$).
Deze redenering is natuurlijk niet conform het Lemma. Bovendien wordt aangenomen dat de rationale kwadraten van een bepaalde vorm zijn die bij voorbaat al voldoen. Daarnaast zijn 4 en ab ook rationale delers (die keuze leidt overigens tot hetzelfde resultaat). Laten we hier het Lemma op de juiste manier bewijzen.

Bewijs van mij Laat de twee rationale kwadraten a^2 en b^2 zijn met $a < b$ en $a,\ b \in \mathbb{Q}$. Laat het verschil van de twee kwadraten $b^2 - a^2$ te schrijven zijn als cd met $c < d$ en $c,\ d \in \mathbb{Q}$ en stel dat geldt dat $\frac{c+d}{2} = \sqrt{b^2}$. Dan kunnen we b^2 ook schrijven als $\frac{1}{4}(c^2 + 2cd + d^2)$. Deze invullen in $b^2 - a^2$ levert dat het verschil van de rationale kwadraten ook gelijk is aan $\frac{1}{4}(c^2 + 2cd + d^2) - a^2$. Oplossen van de vergelijking

$$\frac{1}{4}(c^2 + 2cd + d^2) - a^2 = cd$$

leert ons dat a gelijk is aan $\frac{c-d}{2}$.

[32][Graaf, 1706, p. 341-344]
[33]Zie paragraaf 3.3, [Praalder, 1790, p. 157-159] en [Graaf, 1706, p. 341]
[34][Praalder, 1790, p. 187-188]
[35][Graaf, 1706, p. 322]

3.3.1 Oplossing van opgave 57

De eerste uitwerking van vraag 57 door Praalder is gelijk aan die van Van Ceulen in zijn brief geeft, en gaat als volgt.
Stel dat de derde macht van de som van de drie getallen gelijk is aan $64x^3$. Van Ceulen stelt dat de te vinden getallen van onderstaande vorm moeten zijn.

$$(-y^3+3y^2-3y+65)x^3,\ (y^3-12y^2+48y)x^3 \text{ en } 56x^3. \tag{3.1}$$

Hier zijn x en y rationale getallen.[36]
Wanneer deze getallen afzonderlijk afgetrokken worden van de derdemacht van de som van de getallen (welke gelijk gesteld was aan $64x^3$), vinden we de expressies

$$(y^3-3y^2+3y-1)x^3,\ (-y^3+12y^2-48y+64)x^3 \text{ en } 8x^3.$$

Deze expressies zijn derde machten van rationale getallen als x en y rationaal zijn, namelijk van $(y-1)x,\ (-y+4)x$ en $2x$.
De som van de drie getallen moet gelijk zijn aan $\sqrt[3]{64x^3}=4x$, maar door de keuze voor de getallen als de expressies in 3.1 ook gelijk aan $(-9y^2+45y+121)x^3$. Omdat de som van de getallen op twee manieren geschreven kan worden, vinden we een tweedegraadsvergelijking in y, namelijk $4x=(-9y^2+45y+121)x^3$. Als we aannemen dat $x\neq 0$ (want anders zijn de te vinden getallen allemaal nul, dat is ook een oplossing, maar een triviale), mogen we de linker en rechter kant delen door x. Door beide zijden van de gelijkheid te delen door $4x^3$, vinden we de vergelijking

$$\frac{1}{x^2}=-\frac{9}{4}y^2+\frac{45}{4}y+\frac{121}{4}. \tag{3.2}$$

De linkerkant is een kwadraat, namelijk van $\frac{1}{x}$. Daarom moet de rechterkant ook een kwadraat zijn. Om ons ervan te vergewissen dat de oplossing voor y een rationaal getal zal zijn, stellen we dat de wortel van de rechterkant gelijk is aan $\frac{1}{2}(y+11)$. Het is ook mogelijk om andere wortels te kiezen, maar omdat een kwadraat van de vorm $(ay+b)^2$ nooit een negatieve coëfficïent oplevert voor de tweedegraadsterm, is het slimmer om te zorgen dat $b^2=\frac{121}{4}$. Er moet gelden dat

$$\frac{1}{4}y^2+\frac{11}{2}y+\frac{121}{4}=-\frac{9}{4}y^2+\frac{45}{4}y+\frac{121}{4},$$

dat is alleen zo als $y=0$ of als $y=\frac{23}{10}$. Stel dat $y=0$, dan zouden $65x^3,\ 0$ en $56x^3$ oplossing zijn van de opgave. Dit gaan we na door de drie getallen afzonderlijk af te trekken van $64x^3$ en daarvan de derdemachtswortel te nemen. Dat levert de getallen $-x,\ 4x$ en $2x$. Dit zijn rationale getallen, zolang x rationaal is. Toch is dit geen goede oplossing, omdat één van de getallen gelijk is aan nul en de opgave daardoor simpeler is gemaakt, namelijk dat er slechts twee in plaats van drie getallen gevonden werden.[37]

[36] Van Ceulen gebruikte slechts één variabele, hij vertelde zijn lezers dat de drie getallen zich verhouden als drie getallen maal ℭ en vertelt vervolgens hoe de drie getallen zich precies tot elkaar verhouden. Om de verdere uitleg inzichtelijker te maken, is ervoor gekozen om twee variabelen te gebruiken, net als Praalder deed.

[37] Praalder maakt helemaal geen aantekening bij de aanname dat $y\neq 0$

Stel dat $y = \frac{23}{10}$, dan zullen de te vinden getallen gelijk zijn aan $\frac{61803}{1000}x^3$, $\frac{59087}{1000}x^3$ en $56x^3$.
De som van de drie getallen is gelijk aan $\frac{17689}{100}x^3$, maar we stelden dat de derde macht van de som van de getallen gelijk is aan $64x^3$, dus moet gelden dat $\frac{17689}{100}x^3 = 4x$. Dat is zo voor $x^2 = \frac{400}{17689}$, dus $x = \frac{20}{133}$.

Omdat x en y bekend zijn, kunnen we een oplossing van opgave 57 geven. We stelden dat de getallen voldeden aan de expressies van (3.1). Invullen van de waarden van x en y levert de oplossing $\frac{494424}{2352637}$, $\frac{472696}{2352637}$ en $\frac{448000}{2352637}$. De som van de getallen is $\frac{80}{133}$, de derdemacht van de som min de getallen afzonderlijk zijn respectievelijk $\left(\frac{26}{133}\right)^3$, $\left(\frac{34}{133}\right)^3$ en $\left(\frac{40}{133}\right)^3$.
Dit is slechts één mogelijke oplossing.

Het enige verschil met hoe Praalder deze opgave aanpakt in zijn eerste uitwerking zit hem daarin dat hij stelt dat $\frac{1}{2}(by + 11)$ de wortel is van $-\frac{9}{4}y^2 + \frac{45}{4}y + \frac{121}{4}$. Dan moet gelden dat

$$\frac{b^2}{4}y^2 + \frac{11b}{2}y + \frac{121}{4} \;=\; -\frac{9}{4}y^2 + \frac{45}{4}y + \frac{121}{4}, \tag{3.3}$$

ofwel dat $(b^2 + 9)y^2 + (22b - 45)y = 0$, voor een zekere b (de oplossing van Van Ceulen wordt gevonden door $b = 1$ te kiezen). Dit stelt ons in staat om meerdere oplossingen te vinden, door andere getallen voor b in te vullen. Al zijn er voorwaarden op het interval waaruit b gekozen mag worden als we aannemen dat de te vinden getallen (van de vorm als in de expressies 3.1) groter dan nul moeten zijn. Namelijk er moet gelden dat $x > 0$ en $0 < y < 4$. Vanwege de gelijkheid in vergelijking 3.3, moet b zo gekozen worden dat $b < \frac{-22}{5}$ of $0 < b < \frac{45}{22}$.

Een andere oplossing die Van Ceulen schonk aan zijn lezers is $\frac{466607104}{1976656375}$, $\frac{346734792}{1976656375}$ en $\frac{408877504}{1976656375}$. Om deze oplossing te vinden heeft Van Ceulen mogelijk (in termen van Praalder) $b = -\frac{774}{47}$, $-\frac{27}{47}$, $\frac{47}{86}$ of $\frac{4}{3}$ gekozen. Namelijk, de getallen van deze andere oplossing heeft Van Ceulen waarschijnlijk ook van de vorm als expressies in 3.1 gekozen, dus ook dat de som van de getallen gelijk is aan $4x$. De som van de getallen in de tweede oplossing is $\frac{776}{1255}$, dus $x = \frac{194}{1255}$. De waarde van y kunnen we bepalen met behulp van de som van de expressies 3.1, welke gelijk moet zijn aan de som van de getallen:

$$(-9y^2 + 45y + 121)\left(\frac{194}{1255}\right)^3 = \frac{776}{1255}$$

Uit deze tweedegraadsvergelijking in y volgt dat $y = \frac{141}{97}$ of $y = \frac{344}{97}$. Kies $y = \frac{141}{97}$ en vul deze in vergelijking 3.3 in. Dit wordt een tweedegraadsvergelijking in b, waaruit volgt dat $b = -\frac{774}{47}$ of $b = \frac{4}{3}$. De waarde van y mag ook $\frac{344}{97}$ zijn, in dat geval moet gelden dat $b = -\frac{27}{4}$ of $b = \frac{47}{86}$. Alle vier de getallen voldoen, maar de laatste twee mogelijke getallen voor b zijn minder waarschijnlijk, omdat Van Ceulen dan de volgorde van de getallen verwisseld zou hebben.
Het is goed mogelijk dat Van Ceulen stelde dat de wortel van het rechterlid van vergelijking 3.2 gelijk kan zijn aan $\frac{2}{3}y + \frac{11}{2}$. Praalder vertelt dit resultaat echter niet aan zijn lezers. Daarmee heeft Praalder niet kunnen aantonen dat hij mogelijk dezelfde methode hanteerde als Van Ceulen en dat de methode van

Van Ceulen algemeen is.

De tweede uitwerking die Praalder geeft is algemener dan de eerste uitwerking. De weg waarlangs Praalder de opgave uitwerkt gaat lange tijd gelijk op met de uitwerking van De Graaf en gaat als volgt.
Veronderstel dat de getallen die gevonden moeten worden van de vorm zijn als in onderstaande expressie. En stel de som van de getallen gelijk aan ax.

$$a^3x^3 - b^3x^3, \quad a^3x^3 - c^3x^3 \quad \text{en} \quad a^3x^3 - d^3x^3.$$

De derde macht van de som van de getallen, $(ax)^3$, min de drie getallen afzonderlijk is gelijk aan respectievelijk b^3x^3, c^3x^3 en d^3x^3. De laatste getallen zijn vanzelfsprekend derde machten van rationale getallen als b, c, d en x rationaal gekozen worden. De getallen voldoen echter nog niet aan de voorwaarde dat de som van de drie getallen, $(3a^3 - (b^3 + c^3 + d^3))x^3$, gelijk moet zijn aan ax. De vergelijking $ax = (3a^3 - (b^3 + c^3 + d^3))x^3$ heeft een oplossing voor $x = 0$, de triviale oplossing welke we niet zoeken. Beide zijden delen door x, rest een tweedegraads vergelijking in x; $(3a^3 - (b^3 + c^3 + d^3))x^2 = a$. Ofwel

$$x^2 = \frac{a}{3a^3 - (b^3 + c^3 + d^3)}$$

Omdat de noemer aan de rechterkant niet vanzelfsprekend een rationaal kwadraat is, vermenigvuldigen we de teller en de noemer beide met $3a^3 - b^3 - c^3 - d^3$. De noemer is dan een rationaal kwadraat. De teller is nu gelijk aan $3a^4 - ab^3 - ac^3 - ad^3$ en moet een kwadraat zijn. Stel dat $2a^2 - 3ae$ de wortel is van $3a^4 - ab^3 - ac^3 - ad^3$, met e een rationaal getal, dan moet gelden dat

$$3a^4 - ab^3 - ac^3 - ad^3 = 4a^4 - 12a^3e + 9a^2e^2 \tag{3.4}$$
$$-a^4 + 12a^3e - 9a^2e^2 - ab^3 - ac^3 = ad^3. \tag{3.5}$$

Er is een oplossing voor $a = 0$, maar die voldoet niet aan de opgave. Want stel dat $a = 0$, dan is de som van de drie te vinden getallen gelijk aan 0, dat zou betekenen dat we een triviale oplossing hebben en dat de som van de getallen nul is. De laatste impliceert dat ten minste één van de drie getallen negatief is. Van Ceulen zou dat daarom geen oplossing vinden, daarom nemen we aan dat $a \neq 0$. Als we beide zijden van vergelijking 3.4 door a delen volgt de vergelijking

$$-a^3 + 12a^2e - 9ae^2 - b^3 - c^3 = d^3. \tag{3.6}$$

De rechterkant is een derdemacht, dus moet de linkerkant ook een derdemacht zijn. Stel dat $-a + 4e$ de derdemachtswortel is van de linkerkant. Dan moet gelden dat $-a^3 + 12a^2e - 48ae^2 + 64e^3 = -a^3 + 12a^2e - 9ae^2 - b^3 - c^3$, dus dat $39ae^2 = b^3 + c^3 + 64e^3$. Daaruit leiden we af dat

$$a = \frac{b^3 + c^3 + 64e^3}{39e^2}. \tag{3.7}$$

De getallen b, c en e hoeven nu enkel rationaal gekozen te worden, maar a moet wel kleiner zijn dan $4e$.[38] Blijkbaar hanteert Praalder nog een voorwaarde, namelijk dat dx positief moet zijn, waarbij x afhankelijk is van de waarden

[38]schrijft Praalder, [Praalder, 1790, p. 164]

a, b, c en d. Direct na vergelijking 3.6 zien we dat d^3 gelijk wordt gekozen aan $(-a+4e)^3$. Als de voorwaarde $0 < d^3$ geldt, moet ook gelden dat $0 < d = -a+4$. Daaruit volgt dat $a < 4e$. Dit is echter een onhandig gekozen voorwaarde, omdat de getallen b, c en e rationaal gekozen mogen worden, maar a wel afhankelijk is van b, c en e (zie vergelijking 3.7) en tegelijkertijd kleiner moet zijn dan één van de gekozen getallen.

Praalder was zich ervan bewust dat er toch voorwaarden zijn op de te kiezen getallen, ondanks dat hij eerder zei een andere manier te laten zien "[...] ten anderen, om ook die *Calculatie* te ontgaan, tusschen welke paalen de bekende *Termen* moeten genomen worden [...]"[39] De voorwaarde die Praalder formuleert is dat de getallen b, c, d en e dicht genoeg bij elkaar gekozen moeten worden. Wat hij daarmee precies bedoeld en waarom dat moet zegt hij niet (zie onderstaande passage).

> Men ziet derhalven, dat deeze wijze van Oplossing algemeen is, en altoos zal stand houden, tot hoe veel getallen men die ook bepaalt; ook blijkt tevens daar uit, tusschen welke bepaalingen de bekende Waarden moeten genomen worden: want men zal ten laatsten altoos eene Vergelijkinge verkrijgen, in welke de Cuben der twee gestelde letteren zijn, die men zo na malkanderen gelijk neemt, als mogelijk is; naamelijk; dat die slegts de eenheid verschillen, om dat ze, volgens het voorstel, kleinder moeten zijn, als a.[40]

3.4 Rijen

Naast opgaven over machten van rationale getallen en derdegraadsvergelijkingen geeft Van Ceulen ook cossische opgaven op over rijen. De opgaven gaan over twee soorten rijen, namelijk de Arithmetische Progressie en de Contiunue Proportionalis. Wij kennen deze twee respectievelijk als rekenkundige en meetkundige rijen, met de aantekening dat in de huidige opvatting rijen oneindig veel termen bevatten, in tegenstelling tot de opvatting van Van Ceulen. Zie bijvoorbeeld opgave 50 in de volgende paragraaf waar de rij uit vier termen bestaat. Vier opgaven gaan over rekenkundige rijen, elf over meetkundige rijen en drie opgaven over driehoeksgetallen. Omdat driehoeksgetallen voortkomen uit een rekenkundige rij, zullen we beginnen met rekenkundige rijen, om te vervolgen met driehoeksgetallen en deze paragraaf af te sluiten met de meetkundige rijen.

3.4.1 Rekenkundige rijen

Van Ceulen geeft zijn lezers drie opgaven over rekenkundige rijen. Een rekenkundige rij voldoet aan de eigenschap dat het volgende getal voortkomt uit het huidige getal door er een getal bij op te tellen. Dat getal is constant en noemen we het verschil. De vijftigste opgave is één van de drie opgaven over rekenkundige rijen.

> 50. . Daer is een *Arithmetische Progressie* van vier termijnen, (ofte ghetallen) Alsmen Multipliceert de summa des eersten ende tweeden,

[39] [Praalder, 1790, p. 162]
[40] [Praalder, 1790, p. 169]

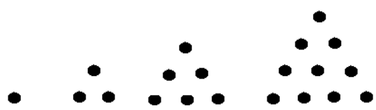
> met den derden termijn, Comt 20. Ende alsmen Multipliceert de derde ende tweede met den vierden ghetal, comt 40. *Vraghe.* Naer de ghetallen? Facit [...] Door const werdt dese ghebracht op 1$\mathfrak{z}\mathfrak{z}$, Ghelijck 500 – 167$\mathfrak{z}$. [...][41]

De opgave is om vier termen uit met een rekenkundig verband te vinden met de eigenschap dat de som van de eerste en de tweede term vermenigvuldigt met de derde term gelijk is aan 20 en de som van de tweede en de derde term vermenigvuldigt met de vierde term gelijk is aan 40. Van Ceulen zegt dat als men verstandig rekent de vergelijking $x^4 = 500 - 167x^2$ opgelost moet worden. Waar x voor staat, zegt hij niet, maar blijkt het tweede getal van de reeks te zijn. Praalder koos het eerste getal van de vier getallen gelijk aan x en vond daarom ook een andere vergelijking. Praalder gebruikt de hint van Van Ceulen niet.
Ook de opgaven 60 en 62 gaan over rekenkundige rijen. Er is echter niet veel te noemen over deze opgaven of over de uitwerkingen van Praalder.

Bij bestudering van de laatste dertig opgaven blijkt dat Van Ceulen rente opvat als een lineair verband (zie paragraaf 4.3). In de renterekening is termijn een begrip welke de tijdseenheid vervangt. Opvallend aan opgave 50 is dat de getallen uit de rekenkundige rij termijnen worden genoemd door Van Ceulen. Hiermee is absoluut niet gezegd dat Van Ceulen aan renterekening dacht toen hij opgave 50 opstelde. Praalder gebruikte het woord term in plaats van termijn in zijn werk.

3.4.2 Driehoeksgetallen

Driehoeksgetallen ontlenen hun naam aan de visuele eigenschap dat ze altijd gelegd kunnen worden in de vorm van een driehoek. De rij gaat als volgt: 1, 3, 6, 10 enz (zie figuur 3.2). Merk op dat het n^{e} getal, a_n, steeds het vorige



Figuur 3.2: Eerste vier driehoeksgetallen

getal plus n is. De algemene beschrijving is dus dat $a_n = a_{n-1} + n$ met $a_1 = 1$. Omdat het eerste getal 1 is, het tweede getal $1 + 2$, het derde getal $1 + 2 + 3$ enzovoort, geldt in het bijzonder dat a_n gelijk is aan de som over de getallen 1 tot en met n. De term a_n is daarom ook gelijk aan

$$a_n = \sum_{i=1}^{n} i = \frac{n(n+1)}{2}.$$

Met dit inzicht is een handigheid af te leiden welke Praalder veelvuldig gebruikt in zijn uitwerkingen. Namelijk dat bij drie opeenvolgende getallen uit een driehoeksgetallen reeks, a_n, a_{n+1} en a_{n+2}, het product van a_n en a_{n+2} gelijk is aan het product van $a_{n+1} - 1$ met a_{n+1}. Het product $a_n a_{n+2}$ wordt door Praalder een Pronikgetal genoemd. Ga na dat

[41] [Ceulen, 1596, fol 69v]

$$a_n a_{n+2} = \frac{n(n+1)}{2}\frac{(n+2)(n+3)}{2} =$$
$$\frac{(n+1)(n+2)}{2}\frac{((n+1)(n+2)-2)}{2} = a_{n+1}(a_{n+1}-1)$$

Zoals eerder genoemd, komt de rij van driehoeksgetallen voort uit een rekenkundige rij. Daarvoor moeten we een nieuwe rij definiëren, namelijk een somrij. Een somrij is een rij die gevormd wordt door de getallen $s_n = \sum_{i=1}^{n} a_i$. Als de rij $\{a_n\}$ de rekenkundige rij is met verschil 1, is de somrij van deze rekenkundige rij gelijk aan de reeks driehoeksgetallen.

De opgaven 53, 54 en 55 gaan over deze driehoeksgetallen. Van Ceulen stelde opgave 53 en voegde daarna gelijk toe dat deze opgave opgelost kan worden, zonder gebruik te maken van Coss.

> 53. . Souckt 3 *Trigonael* getallen, naest in haerder *Progressie* malcander volgende, soo men Multipliceert de eerste met de derde, dat come 420. Facit 15, 21, 28, Is buyten Cos licht te doen.[42]

Daarom introduceert Praalder direct nadat hij opgave 53 oplost met Coss, nog een eigenschap van driehoeksgetallen, Pronikwortel. Ter herinnering, een Pronikgetal is van de vorm $a_n a_{n+2}$. Van een Pronikgetal kan een Pronikwortel getrokken worden, dat geschiedt op de volgende manier. Tel een kwart op bij het Pronikgetal. Neem daarvan de wortel en tel er een half bij op. Ofwel

$$\sqrt{a_n a_{n+2} + \frac{1}{4}} + \frac{1}{2} = a_{n+1}.$$

Ofwel, de Pronikwortel is het driehoeksgetal tussen de twee driehoeksgetal die het Pronikgetal vormen. Praalder legt dit enkel uit aan de hand van een getallenvoorbeeld. Voor de lezer is het daarom niet direct duidelijk of er altijd een kwart opgeteld moet worden bij het Pronikgetal, of dat het kwart afhankelijk is van het betreffende Pronikgetal. Het bewijs dat dit geldt voor alle opeenvolgende driehoeksgetallen is een direct gevolg van de eigenschap van het Pronikgetal; $a_n a_{n+2} = a_{n+1}(a_{n+1}-1)$. Namelijk tel aan beide zijden een kwart op en herken dat de rechter zijde gelijk is aan $(a_{n+1} - \frac{1}{2})^2$. Neem aan beide zijden de wortel en tel bij beide zijden een half op.
Of herken een tweedegraadsvergelijking afhnakelijk van a_{n+1}, dan worden twee antwoorden gevonden, namelijk $a_{n+1} = \frac{1}{2} \pm \sqrt{\frac{1}{4} + a_n a_{n+2}}$. We spreken echter van driehoeksgetallen en die zijn altijd groter dan nul, dus blijft over $a_{n+1} = \frac{1}{2} + \sqrt{\frac{1}{4} + a_n a_{n+2}}$. Het is erg aannemelijk dat Van Ceulen op Pronikgetallen doelde en misschien ook op de Pronikwortel (mogelijk onder een andere naam).

Van Ceulen maakt bij het stellen van de honderd opgaven meerdere kleine foutjes, sommige daarvan zijn zetfouten, maar soms zijn het ook formuleringsfoutjes. Praalder maakt nergens aantekening van deze foutjes en past daarop niet de vraagstelling aan, getuige ook opgave 55.

> 55. . Souckt dry *Trigonael* ghetallen, soo men Multipliceert de eerste met de derde, ende tot den Product gheaddeert dat Quadraet

[42] [Ceulen, 1596, fol 69v]

> tweemael, welck ghecomen is vanden Duplaet des tweeden, ende noch viermael dat selve ghetal, dat come 23011560.[43]

We zoeken drie driehoeksgetallen, als we stellen dat ze opvolgend moeten zijn, moet er voor de getallen gelden dat $a_n a_{n+2} + 2(2a_{n+1})^2 + 4a_{n+1} = 23011560$. Door voor het Pronikgetal $a_{n+1}(a_{n+1} - 1)$ in te vullen en a_{n+1} y te noemen, wordt de op te lossen vergelijking $9y^2 + 3y - 23011560 = 0$. Dat is onder de aanname dat de drie driehoeksgetallen opvolgend zijn. Deze vergelijking is echter niet oplosbaar in gehele getallen. Met de aanname dat de driehoeksgetallen niet opvolgend hoeven te zijn, volgt er een vierdegraadsvergelijking in drie variabelen. Het is onwaarschijnlijk dat Van Ceulen dat als opgave bedoelde, omdat hierop veel oplossingen zijn.
Het is mogelijk dat het hier een zetfout betreft en dat het achtcijferige getal er net anders uit zou moeten zien. Bij bestudering van mogelijke oplossingen van de vergelijking $9y^2 + 3y = c$, blijkt dat er geen zetfout gemaakt is in het getal c, omdat het anders zou gaan om meer dan vier cijfers incorrect.
Het is aannemelijk dat ik het woord "tweemael" in de vraagstelling verkeerd interpreteer, want Praalder stelt de opgave in woorden precies gelijk aan hoe Van Ceulen hem stelde, maar bij bestudering van de uitwerking die Praalder geeft, blijkt dat hij de opgave vertaalde naar: Vindt a_n, a_{n+1} en a_{n+2} waarvoor geldt dat $a_n a_{n+2} + 4a_{n+1}^2 + 4a_{n+1} = 23011560$. Uit deze vergelijking volgt de tweedegraadsvergelijking $5y^2 + 3y - 23011560 = 0$ met $y = a_{n+1}$.[44] Deze vertaling van de opgave is wel oplosbaar, met als oplossing dat $y = 2145$. De drie driehoeksgetallen zijn dus 2081, 2145 en 2210, dat zijn het 63, 64 en 65$^{\text{e}}$ getal uit de reeks.
Hoe het woord "tweemael" in opgave 50 van Van Ceulen geïnterpreteerd moet worden is mij onduidelijk.

3.4.3 Meetkundige rijen

Zoals al eerder genoemd geeft Van Ceulen elf opgaven over meetkundige rijen. Vier daarvan bieden een klein inkijkje in wat Van Ceulen dacht ten aanzien van negatieve getallen als oplossing van een opgave. De vier opgaven staan hieronder besproken. De zeven andere opgaven over meetkundige rijen zijn niet zo interessant. Daarom zal daaraan geen aandacht besteed worden.

Van Ceulen geeft vier opgaven die vrijwel identiek zijn ware het niet dat er plus tekens worden vervangen door min tekens. Laten we opgave 37 als voorbeeld nemen, die luidt als volgt:

> 37. . Daer zijn 3 ghetallen, *Continue Proportionalis*, de eerste is $\sqrt{5}$, ende de derde $\sqrt{8}$ meer als de tweede. *Vrage*. Naer de ghetallen? *Antvvoordt*. $\sqrt{22\frac{2}{9}} - \sqrt{13\frac{8}{9}}$, $\sqrt{22\frac{2}{9}} - \sqrt{35\frac{5}{9}}$, ende de derde doet $\sqrt{56\frac{8}{9}} - \sqrt{35\frac{5}{9}}$.[45]

Om deze opgave op te lossen, kiezen we het tweede getal gelijk aan x, het eerste dus $x + \sqrt{5}$ en het derde $x + \sqrt{8}$. De eigenschap dat de opeenvolgende

[43] [Ceulen, 1596, fol 69v]
[44] [Praalder, 1790, p. 148]
[45] [Ceulen, 1596, fol 69r]

getallen continue proportie hebben, betekent dat de factor waarmee het eerste getal vermenigvuldigd is om het tweede getal te krijgen gelijk is aan de factor waarmee het tweede getal vermenigvuldigd moet worden om het derde getal te verkrijgen. Kort gezegd moet gelden dat $x+\sqrt{5} : x :: x : x+\sqrt{8}$ (uit te spreken als $x+\sqrt{5}$ staat tot x als x staat tot $x+\sqrt{8}$). Dat kan vertaald worden naar

$$\frac{x}{x+\sqrt{5}} = \frac{x+\sqrt{8}}{x}$$

Uitwerken van deze vergelijking levert dat $(\sqrt{5}+\sqrt{8})x+\sqrt{40}=0$, dus dat

$$x = \frac{-\sqrt{40}}{\sqrt{5}+\sqrt{8}} = \frac{5\sqrt{8}-8\sqrt{5}}{3}.$$

Dit levert hetzelfde antwoord op als wat Van Ceulen vond, want het antwoord wat wij vonden kan ook zo geschreven worden dat alle getallen onder de wortel tekens staan;

$$\frac{5\sqrt{8}-8\sqrt{5}}{3} = \sqrt{\frac{200}{9}} - \sqrt{\frac{320}{9}}.$$

Door vervolgens te bepalen hoe vaak 9 in 200 gaat en in 320, worden precies de wortels gevonden die Van Ceulen vond.
Opgave 38 is hetzelfde, echter zijn de getallen achtereenvolgens gelijk aan $x-\sqrt{5}$, x en $x-\sqrt{8}$, en schrijft Van Ceulen daarnaast:

> Dese twee zijn mijn van eenen Meester ghesonden, met de twee volghende, ende is een slechte saecke, uytghesondert dat de ghetallen vreemt vallen.[46]

Vrij vertaald zegt Van Ceulen dat opgaven 37 tot en met 40 hem toegezonden zijn door een collega wiskundige en niet moeilijk zijn, maar dat de antwoorden "vreemd" zijn. Wat Van Ceulen bedoelt met vreemd en waarom hij de antwoorden dat vindt, zegt hij niet. Wel zegt hij bij opgave 40:

> Dese is de gheschickste van vieren.[47]

Waarom het antwoord bij opgave 40 het meest geschikt is, zou volgens Praalder zo zijn

> [...] mogelyk, om dat de antwoorden derzelven *Positive Surden* zyn; daar in tegendeel, onder de antwoorden der anderen; altoos ende *Negative Surdische* grootheid gevonden wordt; want anders zyn deze vier Vraagen even geschikt, en genoegzaam de zelfde.[48]

Kortgezegd zegt Praalder te denken dat Van Ceulen de antwoorden die kleiner dan nul zijn niet volledig ziet als onbetwistbare antwoorden. Zoals al werd vermeld op pagina 3.2 in paragraaf 3.2, werden negatieve getallen lange tijd niet beschouwd als voldoende oplossing. In dit werk van Van Ceulen wordt duidelijk dat Van Ceulen weifelachtiger staat tegenover negatieve getallen als antwoord

[46] [Ceulen, 1596, fol 69v]
[47] [Ceulen, 1596, fol 69v]
[48] [Praalder, 1790, p. 93]

dan latere wiskundigen. De reden dat negatieve antwoorden lang niet geaccepteerd werden is deels te verklaren door de oorsprong van algebra. Wiskundigen gebruikten algebra om meetkundige vraagstukken op te lossen en in de meetkunde zijn negatieve lengtes slecht voor te stellen.
Aanvullend merkt Praalder op dat de Groningse wiskundige Marten Wilkens vier soortgelijke opgaven opstelde in een boek van hem met de titel *Eerste honderd konstige Vraagen*.[49] Onduidelijk is of dit boek betrekking heeft op de honderd opgaven van Van Ceulen. Het gaat hier om dezelfde vragen, maar dan $\sqrt{7}$ in plaats van $\sqrt{5}$ en $\sqrt{11}$ in plaats van $\sqrt{8}$. Praalder werkt een manier uit om ongeacht de getallen onder de worteltekens alle 4 de opgaven op te lossen. Vervolgens maakt Praalder die methode zo algemeen dat met één uidrukking alle 8 de opgaven (vier van Van Ceulen en vier van Wilkens) opgelost kunnen worden door waarden voor de coëfficiënten in te vullen. Praalder besteedt in totaal 16 pagina's aan berekeningen, op- en aanmerkingen bij opgaven 37 tot en met 40. Een deel hiervan is besteed aan het steeds algemener maken van de vier opgaven en allerlei mogelijke uitbreidingen op de vier opgaven. Een voorbeeld van een uitbreiding op de opgave is:

> 1. VOORBEELD. *Men vraagt naar een getal, zodanig; dat, als men hetzelve tot drie gegeevene* Surdische *Waarden, als* $\sqrt{2}$, $\sqrt{3}$, *en* $\sqrt{5}$, *vergaart, de drie uitkomsten geduurige evenredigen zyn.*[50]

De uitbreidingen hebben geen betrekking op het werk van Van Ceulen als van Wilkens. Het blijft onduidelijk waarom Praalder de betreffende drie uitbreidingen vermeldt. Te meer omdat de uitleg van Pronkigetallen, Pronikwortel en de regel Falcis geschiedt door eenmaal een getallenvoorbeeld te geven, dit is een schril contrast in hoe volledig Praalder bij deze vier opgaven wenst te zijn.
Praalder eindigt daarmee dat hij een tweedegraadsvergelijking wil vinden voor opgave 37, dus kwadrateert hij de linker- en rechterzijde van de vergelijking die gevonden werd bij het oplossen van opgave 37, $\sqrt{5}x = \sqrt{8}x - \sqrt{40}$. Daaruit volgen twee oplossingen voor x. De ene oplossing is echter niet geschikt, de andere wel blijkt door invullen in het probleem. Omdat

> [...] de tweede wortel uit de Vierkants-Vergelykinge niet voldoen zal; en dus is het klaarblykelyk, dat de antwoorden, welken wy door middel van de *simpele* vergelykinge gevonden hebben, de waare antwoorden zyn, en dat 'er geene andere, die voldoende zyn, op deeze Voorstellen kunnen gegeeven worden.[51]

Het is echter erg vreemd om via deze weg aan te tonen dat het gevonden antwoord het enige antwoord is. Het probleem kon namelijk zonder verlies van algemeenheid gereduceerd worden tot een lineaire vergelijking. Door te kwadrateren wordt de lineaire vergelijking een kwadratische vergelijking welke twee oplossingen heeft. Daarmee wordt het echter niet mogelijk om meer oplossingen te vinden, want het probleem was al lineair en had dus niet meer dan één

[49] Zie [Praalder, 1790, p. 93], op internet is te vinden dat deze wiskundige (ook wel aangeduid met Martin Wilkens) het boek *Arithmetica, ofte Reken-konst: verciert met weel schoone regulen ende exempelen seer nut ende bequaem voor alle leerlingen ende vlijtige aenvangers deser konst*, Groningen, 1639 geschreven heeft. Marten Wilkens wordt ook genoemd in het boek *Oeffenschool der Mathematische Weetenschappen* als voorbeeld van invloedrijke tijdgenoten, [Strabbe, 1770a, voorreden].

[50] [Praalder, 1790, p. 103]

[51] [Praalder, 1790, p. 109]

oplossing.

Bij opgave 41 kiest Praalder de te vinden getallen gelijk aan x, xy en xy^2, omdat de getallen weer continue proportie hebben. Dit is opmerkelijk omdat hij de eigenschap van continue proportie wederom had kunnen vertalen naar het feit dat de eerste maal de derde gelijk moet zijn aan de tweede in het kwadraat, net zoals hij bij voorgaande vier opgaven deed. De opgave wordt door de andere methode niet moeilijker of makkelijker.

Hoofdstuk 4

Numeriek

Zoals genoemd in hoofdstuk 2 moeten opgave 5 en 6 numeriek worden opgelost. Dat betekent dat er een benadering van een oplossing gevraagd wordt in decimalen. Van Ceulen was een begenadigd rekenaar en maakte ook benaderingen van oplossingen van vergelijkingen welke bijvoorbeeld de omtrek van een 32512254720-hoek[1] beschrijven. Wat precies de manier was om deze benaderingen te vinden is tot op heden niet bekend. Langs deze onbekende weg heeft Van Ceulen ook de 35 decimalen van het getal π becijferd. De methode die Van Ceulen gebruikte om tot bruikbare vergelijkingen te komen is gebaseerd op de methode die Archimedes 2000 jaar eerder gebruikte. Archimedes kwam slechts tot 2 cijfers achter de komma,[2] hij stelde het interval $3\frac{1}{7} < \pi < 3\frac{10}{71}$ vast. Archimedes maakte een boven- en ondergrens voor het getal dat wij nu π noemen, door de omtrek van een in- en omgeschreven veelhoek aan een cirkel te berekenen. Door het aantal hoekpunten van een veelhoek omschreven aan een cirkel te verdubbelen, past de nieuwe veelhoek volledig in de vorige. Evenzo geldt voor een veelhoek ingeschreven in een cirkel volledig bevat kan worden in een ingeschreven veelhoek met twee keer zoveel hoekpunten. Met dit inzicht kunnen we met zekerheid zeggen dat een veelhoek met meer hoekpunten nauwkeuriger een cirkel benadert.
Welke numerieke methode Van Ceulen gebruikte om vervolgens de decimalen te berekenen bij de numerieke opgaven, dat wist Praalder niet, getuige de volgende passage.

> Het schynt, dat LUDOLF, en misschien meer andere Schryvers van dien tyd, hier toe eene algemeene Leerwyze gehad hebben; maar hoe, en op wat wyze, die geweest zy, is my onbekend. Indien men nu geene moeite in het Rekenen ontziet, gelyk LUDOLF dit veelvuldig, en voornamelyk in dit Boek *over den Cirkel*, getoont heeft, is het niet veel kunst, om deezen Wortel door nadering te vinden: echter is het noodzakelyk, dat 'er een weg gebaand worde, langs welken men den wortel, door nadering, uit de hoogere Vergelykingen kan vinden, alzo men, zonder dezelven, deeze Voorstellen wel tot eene Vergelyking kan brengen, doch geenzins de antwoorden vinden. Ik

[1] Hiermee werden niet eens de eerste 35 decimalen van het getal π gevonden. [Struik, 1958, p. 56]

[2] [Bos, 2000, p. 259]

> zal derhalven eenige wegen voorstellen, langs welke men tot de ontdekking der begeerde Wortelen kan komen.[3]

Praalder bespreekt hierop volgend drie numerieke methoden. Het valt op dat de methoden een oplopende efficiëntie hebben, Praalder gebruikt niet het woord efficiëntie, maar merkt wel op dat de methodes steeds "dienstiger"[4] zijn. Met efficiëntie bedoel ik hoe het aantal handelingen zich verhoudt tot het aantal nieuw gevonden decimalen. De eerste methode met een zeer kleine efficiëntie is gewoon uitproberen. Er zijn ten minste twee handelingen nodig om één decimaal te vinden. De tweede methode noemt Praalder de regel Falcis, maar wordt doorgaans regel falsi genoemd.[5] Er wordt gebruik gemaakt van een soort gewogen gemiddelde, waardoor de volgende schatting slim wordt gekozen. De snelste methode om tot een groot aantal decimalen te komen is een methode waarbij de oplossing eerst wordt geschat en daarna geschreven als de schatting plus een onbekende. De eerste schatting is een geheel getal, net kleiner dan de oplossing. De onbekende wordt uitgerekend door alle termen met graad hoger dan 2 te negeren. Het aantal decimalen dat wordt gevonden neemt met een beetje geluk exponentieel toe. Zeer efficiënt dus.
Praalder legt deze drie methodes uit door ze toe te passen op opgave 5. Omdat opgaven 5 en 6 de enige twee opgaven zijn waar een numeriek antwoord gevraagd wordt tussen de eerst zeventig opgaven, staan deze twee opgaven besproken in paragraaf 4.1. Hoe de methoden precies gaan, zal beschreven worden in paragraaf 4.2. Tussen de laatste dertig opgaven staan nog twintig opgaven waar een numerieke benadering gevraagd wordt. Praalder zegt dat de laatste dertig opgaven van weinig belang zijn. Daar mag aan getwijfeld worden, daarom zullen deze laatste dertig opgaven een eigen paragraaf krijgen; paragraaf 4.3.

4.1 De opgaven 5 en 6

De opgaven 5 en 6 zijn opvallend zoals ze gevraagd staan tussen de meetkundige opgaven. Er wordt namelijk een decimaal getal gevraagd. Daarnaast zijn dit bijzondere opgaven, omdat deze zo gesteld zijn als Viète ze vroeg aan zijn lezers.[6] Bijzonder is dat in deze vragen lengtes afgetrokken worden van oppervlakten, dat is in termen van meetkunde niet voor te stellen. Viète was grondlegger van wat hij zelf "nieuwe algebra" noemde, hij was in staat om met algebra betekenis te geven aan meetkunde tegelijk met analyse.[7] Viète zou een vergelijking zoals $x^3 + ax = b$ zien als een vergelijking $A^3 + B^2A = C^3$, zodat alle termen inhouden voorstellen. Viète gebruikte klinkers voor onbekenden en medeklinkers voor coëfficiënten.[8]

Hier volgt nu opgave 5 gevolgd door een vrij vertaling naar eigentijds Nederlands.

[3][Praalder, 1790, p. 39]
[4][Praalder, 1790, p. 45]
[5][Thoro, 1963]
[6]Zie [Vlek, 2008, p. 50] en [Bos, 2001, p. 147].
[7][Bos, 2000, p. 145-146]
[8][Klein, 1968, p. 172-173]

> 5. . Daer zijn twee vierhouckighe stucken landts / ende elck heeft vier gherechte winckels: Alsmen van de grootheydt des cleynsten Substraheert het ghetal der grootster lengde / rest 460, ende de breede des cleynsten / houdt haer teghen haer lengde / als 2 tegen 5, ende soo men de breede des cleynsten Substraheeft van de breede des grootsten lands / Rest $\frac{2}{7}$ der lengde des grootsten / ende beyde dese stucken landts doen t'samen 3600 roeden in't viercant. *Vraghe.* Hoe lanck ende breedt dat elcke veldt is? Alsmen set't voor de breede des cleynsten $2\mathfrak{R}$, dan is syn lengde $5\mathfrak{R}$. Procedeert naer't behoorden / Comt $20\mathfrak{z}\mathfrak{z} + 14\mathfrak{C} + 39800$, dit is ghelijck $1833\mathfrak{z} + 644\mathfrak{R}$. facit $1\mathfrak{R}\ 7\frac{35450213}{100000000}$ te cort / ende $7\frac{35450214}{100000000}$ roeden te lanck / de rest is nu licht.[9]

Opgave 5 gaat vrij vertaald als volgt. Er zijn twee stukken land. Het stuk land met de kleinste oppervlakte heeft een lengte-breedte verhouding van 5 : 2. Noem in navolging van Van Ceulen de lengte van dit stuk land $5x$, dus de breedte $2x$. De lengte en breedte van het grote stuk land noemen we respectievelijk b en a met $a < b$. Wanneer men van de oppervlakte van het kleinste stuk land de lengte van het grootste stuk land aftrekt, rest er 460 ($10x^2 - b = 460$). Als men de breedte van het kleinste stuk land aftrekt van de breedte van het grote stuk land, vind men $\frac{2}{7}$ van de lengte van het grootste stuk land ($a - 2x = \frac{2}{7}b$). En de oppervlakte van beide stukken land samen is 3600 vierkante-roeden[10] ($ab + 10x^2 = 3600$). Vindt de lengtes van de stukken land.

Door nu ook a en b in x uit te drukken volgt de vierdegraadsvergelijking $20x^4 + 14x^3 + 39800 = 1833x^2 + 644x$. Bij de vertaling van deze opgave naar formules heb ik aangenomen dat lengte groter is dan breedte, de formule die Van Ceulen vindt, ondersteunt deze aanname.
Van Ceulen vertelt ons dat x ongeveer gelijk moet zijn aan $7,35450213$. De vergelijking heeft echter nog een oplossing, voor $x \approx 5,753$, deze voldoet echter niet aan de opgave; met $x \approx 5,753$ worden negatieve lengtes gevonden voor de stukken land.
Praalder vindt dezelfde benadering als Van Ceulen, maar rekent ons niet voor wat de lengtes van de stukken land zijn, terwijl juist dat gevraagd was.

Goed om te vermelden is dat Praalder in een aanmerking laat zien dat hij met één extra stap tot de benadering $x = 7,3545021361534515$ komt.[11] Om tot de benadering te komen die Praalder noemt, gebruikt hij de derde- en vierdegraadstermen die hij eerder negeerde bij het toepassen van de regel Falcis (zie paragraaf 4.2). Echter zit zijn berekening vol met afrondingen en aannames die dubieus zijn. Dat blijkt ook wel, want zijn benadering is minder goed dan de voorgaande. Het blijft onduidelijk wat Praalder hiermee wilde aantonen.
Het is erg onwaarschijnlijk dat er een drukfout gemaakt is bij het drukken van het boek van Praalder, want een correcte benadering van een oplossing van de vergelijking luidt $x \approx 7,3545021302884285$.

[9] [Ceulen, 1596, fol. 67v]
[10] Dit is ook de plaats waar Van Ceulen en Praalder voor het eerst in deze opgave de lengte-eenheid noemen.
[11] [Praalder, 1790, p. 48]

Bij opgave 6 is het wederom de bedoeling de lengtes en breedtes van twee stukken land te vinden. Het kleinste stuk land heeft een breedte-lengteverhouding van 2 staat tot 5. De som van de oppervlaktes en de som van de lengtes van beide stukken land opgeteld is gelijk aan 750. De oppervlakte van het kleine stuk land opgeteld bij de lengte van het grote stuk land is gelijk aan 200. De breedte-lengteverhouding van het grote stuk land is 1 staat tot 3.[12] Als Van Ceulen opgave 6 stelt, voegt hij toe deze opgave makkelijker is dan de voorgaande, zie citaat.

> Dit is lichter alst voorgaende.[13]

Praalder vind een numeriek antwoord gelijk aan ongeveer 4,00156. Hij start met de waarde 4 en ziet dat deze waarde ingevuld in de uitdrukking $x^4 - 40x^2 + \frac{3}{20}x + \frac{767}{2}$ niet veel verschilt van nul. Daarom kiest hij een boven- en ondergrens respectievelijk 4,002 en 4,001. Praalder denkt dat Van Ceulen aanmerkt dat deze opgave makkelijker is dan opgave 5 omdat de weg tot een voldoende benadering gemakkelijk en snel is omdat het antwoord zo dicht bij 4 ligt.
Om te onderzoeken of de aanname van Praalder gerechtvaardigd is, bekijken we wat Van Ceulen een voldoende antwoord vond op een opgave. Van Ceulen vond een opgave opgelost als de kleinste positieve oplossing gevonden werd welke voldoet aan de vraagstelling. In het geval van opgave 5 was de kleinste positieve oplossing van de vergelijking ($x \approx 5,753$) geen antwoord op de vraag, omdat het kleine stuk land dan negatieve lentes heeft. Bij opgave 6 voldoet de kleinste positieve oplossing wel aan de opgave, sterker nog, de grotere positieve oplossing levert negatieve lengtes op voor het kleine stuk land.
Praalder maakte geen aantekening dat Van Ceulen bij opgave 5 niet het kleinste positieve antwoord op de vierdegraadsvergelijking nam als antwoord. Daarom is ook niet zeker of Praalder zich bewust was dat Van Ceulen misschien een andere reden had dan Praalder om te concluderen dat opgave 6 makkelijker zou zijn. De methode die Van Ceulen hanteerde om tot een numeriek antwoord te komen is ons onbekend, maar was ook onbekend voor Praalder. Daarom is het niet vanzelfsprekend om aan te nemen dat hoe makkelijk het doen van een numerieke benadering op deze specifieke opgave in de ogen van Van Ceulen de reden was om deze opgave makkelijker te noemen.

4.2 De drie numerieke methoden

Praalder bood zijn lezers drie verschillende manieren aan om een hogeregraadsvergelijking numeriek op te lossen. De verschillende manieren van benaderen beschrijft Praalder in "Scholium" I, II en III.[14] Praalder gebruikt het woord "Scholium" als hij in een zijstap meer theorie geeft. Zoals hiervoor beschreven is de eerste methode die Praalder beschrijft: benaderen door proberen. Tegenwoordig wordt deze methode onderwezen als inklemmen.[15] Allereerst kiest men twee gehele getallen, met verschil gelijk 1, waartussen de oplossing zich zal bevinden. Daarna wordt de bovengrens verlaagd door één decimaal te kiezen,

[12] [Ceulen, 1596, fol. 67v]
[13] [Ceulen, 1596, fol 67v]
[14] [Praalder, 1790, p. 39-47]
[15] [Boer e.a., 2002, hoofdstuk 11]

precies zo dat de bovengrens min een tiende de grootste ondergrens is. Door dit proces te herhalen kan men net zo veel decimalen vinden als men wenst. Het is echter niet efficiënt, omdat er niet meer dan één decimaal gevonden wordt per ten minste 2 berekeningen.
Praalder zelf vindt dit een te omslachtige manier, want

> [...] men vordert daar mede telkens maar ééne letter, indien men het ten besten aantreft, of men doet wel eens alle moeite te vergeefs; zelfs is het byna ondoenelyk, als de getallen zeer groot worden, ten ware men hier eenige Weeken aan wilde arbeiden.[16]

De tweede weg die Praalder noemt is „den Regel *Falcis*". De beschrijving die Praalder geeft van deze methode beperkt zich tot de volgende passage en de uitwerking van opgave 5.

> [...] Hierom zullen wy eenen anderen weg aanwyzen, om, ware het mogelyk, telkens eenige letteren meer in den wortel te vorderen. Deze geschied volgens den Regel *Falcis*, door het bemiddelen van de verschillen; en indien men zich bepaalt, dat door de eene stelling x te groot bevonden zynde, door de andere wederom x te klein komt, zal deeze bemiddeling veel sterker aantrekken; dus zullen wy met de zelfde moeite, die reeds in het eerste *Scholium* gedaan is, wel zo veel vorderen, dat de waarde van x na genoeg bepaald zal worden.[17]

Deze passage kan als volgt geïnterpreteerd worden. De regel Falcis zal door het "bemiddelen" van de verschillen tussen een boven- en een ondergrens met dezelfde moeite als bij het inklemmen sneller tot een goede benadering komen. Praalder neemt de vergelijking van Van Ceulen (zie passage op pagina 54) en voert daarmee de volgende berekeningen uit, aangenomen dat $x = 8$. De berekening staat zo letterlijk mogelijk weergegeven in tabel 4.1.[18] De linkerkant

$20x^4 =$	81920	$1833x^2 =$	117312
$14x^3 =$	7168	$644x^3 =$	5152
	39800		122464
	128888		128888
			+6424

Tabel 4.1: Berekening van Praalder

van de vergelijking is groter dan de rechterkant onder de aanname dat $x = 8$; er wordt dus niet voldaan aan de gelijkheid.
Stel nu dat $x = 7$, dan volgt op dezelfde manier dat de rechterkant 1708 groter is dan de linkerkant; ook nu wordt er niet aan de gelijkheid voldaan. Het verschil van de verschillen is gelijk aan $6424 + 1708 = 8127$. Hierna volgt weer een tabel,[19] welke zo goed mogelijk is weergegeven met tabel 4.2. Hier mag de lezer zelf raden dat het eerste getal, 44968, het product is van 7 met 6424; het product van 7 maal het verschil onder de aanname dat $x = 8$. Het tweede getal $13624 = 8 \times 1708$. De som van de twee getallen is gelijk aan 58592, deze gedeeld

[16] [Praalder, 1790, p. 41]
[17] [Praalder, 1790, p. 41-42]
[18] [Praalder, 1790, p. 42]
[19] [Praalder, 1790, p. 42]

	44968
	13624
	58592
8127	———
komt $x =$	$7,3$

Tabel 4.2: Berekening van Praalder

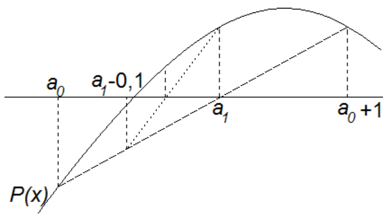
door het verschil van de verschillen, 8127, is gelijk aan $7,2095$. Praalder zegt dat daardoor volgt dat $x = 7,3$.
Waarom Praalder het getal $7,2095$ afrond naar $7,3$ wordt duidelijk als blijkt dat $x = 7,3$ te klein is en $x = 7,4$ te groot. Door het bemiddelen (volgens de methode welke hierboven beschreven is), vindt Praalder een nieuwe benadering. De nieuwe benaderingen volgen elkaar op als 7,35, 7,3545 en 7,35450213. Praalder sjoemelt een beetje met wat hij zijn lezers wel of niet vertelt, bijvoorbeeld de benadering 7,3545 is een afronding van 7,35449 en blijkbaar is 7,3543 een te kleine waarde om mee door te rekenen.
Het valt op dat Praalder niet goed kan benoemen hoe de regel in zijn algemeenheid gaat. Bovendien laat Praalder niet zien hoe hij aan nieuwe getallen komt; bij veel van de getallen die Praalder gebruikt moet de lezer zelf achterhalen of het om optelling, vermenigvuldiging of deling gaat en met welke getallen. Dat Praalder enkel een getallen voorbeeld geeft, dus geen algemene beschrijving is mogelijk te verklaren doordat hij nergens in zijn boek indices (ook bekend als subscripten) gebruikt in tegenstelling tot zijn werk *Gronden der Wiskonst*. Het wordt daardoor minder goed mogelijk om de methode op een algemene manier te beschrijven. Opvallend blijft dat Praalder geen aantekeningen maakt van de overeenkomsten en verschillen tussen de opvolgende stappen en niet vertelt waarom de stappen genomen dienen te worden.

De gangbare manier om de regel Falcis, zoals Praalder deze methode noemt, aan te duiden is de regel falsi. De twee methoden verschillen lichtelijk van elkaar. Om dat verschil te kunnen benoemen, zullen we de manier van Praalder een beetje herschrijven.
Schrijf de vergelijking zodanig dat alle termen aan één zijde van het gelijkteken staan en noem die expressie $P(x)$. Het probleem is nu om het nulpunt van het polynoom $P(x)$ te vinden.

Vindt twee getallen a_0 en $a_0 + 1$ zo dat $P(a_0)$ en $P(a_0 + 1)$ tegengesteld teken hebben. Dan zal het te vinden nulpunt zich bevinden op het interval $a_0 \leq x \leq a_0 + 1$. Stel de formule op van de lijn door de punten $(a_0, P(a_0))$ en $(a_0 + 1, P(a_0 + 1))$;

$$y = \frac{P(a_0+1) - P(a_0)}{a_0 + 1 - a_0}\, x \;+\; b, \text{ met } b = P(a_0) - a_0\,(P(a_0+1) - P(a_0))$$
$$y \;=\; (P(a_0+1) - P(a_0))\; x \;+\; (a_0+1)P(a_0) \;-\; a_0 P(a_0+1).$$

Beschouw de lijn als een benadering van het polynoom en bereken het snijpunt van de lijn met de x-as. De waarde van x waarvoor dit geldt, is onze nieuwe benadering en noemen we a_1, zie figuur 4.1. Door uitwerken zal de volgende



Figuur 4.1: Voorstelling van de regel Falcis

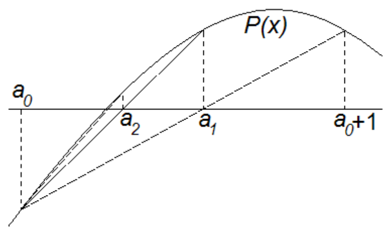
formule gelden voor a_1

$$a_1 = \frac{(a_0+1)P(a_0) - a_0 P(a_0+1)}{P(a_0) - P(a_0+1)} = a_0 + \frac{P(a_0)}{P(a_0) - P(a_0+1)}.$$

In de volgende stap wordt het boven genoemde proces herhaald met a_1 in de plaats van a_0. Echter tellen we bij a_1 een tiende op, of trekken we een tiende af. Om het proces te kunnen herhalen, moet het polynoom in de punten a_1 en $a_1 \pm 0,1$ tegengesteld teken hebben.

Het polynoom moet voldoen aan een voorwaarde om het proces, zoals hierboven beschreven, te laten slagen. Namelijk, als de polynoom voor en na het te benaderen nulpunt een erg verschillende helling heeft, hoeft de volgende benadering niet dicht genoeg te liggen bij de oplossing om de regel Falcis, zoals Praalder die beschrijft, te doen slagen. Hierbij moet aangetekend worden dat de opgaven 5 en 6 die Van Ceulen allebei voldoen aan deze voorwaarde.

De regel falsi is ook een manier om een numerieke benadering te maken en lijkt heel erg op de regel Falcis van Praalder. Bij de regel falsi hangt de volgende benadering af van de laatste benadering en de vorige onder- dan wel bovengrens, zodanig dat de polynoom tegengesteld teken heeft voor die twee waarden (zie figuur 4.2).[20]
Met deze methode is het minder belangrijk hoe het getal wordt afgerond, omdat



Figuur 4.2: Voorstelling van de regel falci

er niet de voorwaarde geldt dat de nieuwe benadering plus een negatieve macht van tien tegengesteld teken moet hebben. De voorwaarde die geldt bij de methode van Praalder, doet niet terzake bij de algemene regel Falsi. Waarom Praalder een andere beschrijving hanteerde is onduidelijk en nodigt verder onderzoek uit.

[20] [Thoro, 1963, p. 869]

De derde weg om een numerieke oplossing te vinden maakt wederom gebruik van de eerste schatting dat de oplossing van de vergelijking ligt tussen a_0 en $a_0 + 1$. Praalder brengt alle termen van de vergelijking naar één kant (laat ons die expressie $P(x)$ noemen) en substitueert a_0+y voor x, met $0 < y < 1$ (laat ons dat polynoom $Q(y)$ noemen). Negeer alle termen van graad ≥ 3, dan rest er een tweedegraadsvergelijking die we kunnen oplossen ($Q(y) = c_0 + c_1 y + c_2 y^2 + \mathcal{O}(3)$ en de vergelijking die opgelost moet worden luidt $c_0 + c_1 y + c_2 y^2 = 0$). De oplossing $0 < y < 1$, is de bijdrage van y aan x die we zoeken en noemen we a'_1. Kies het gewenste aantal decimalen van a'_1 en voeg die toe aan a_0, dat is de nieuwe benadering a_1. Substitueer in de volgende stap x in $P(x)$ voor $a_1 + y$ en herhaal de procedure.

Hoe veel decimalen van de waarden van a'_{n+1} als oplossing van $Q(y) - \mathcal{O}(3)$ we op mogen tellen bij a_n als een nieuwe ondergrens a_{n+1}, kan op de volgende manier bepaald worden. Omdat a'_{n+1} berekend is, kunnen we de waarde van $\mathcal{O}(3)$ uitrekenen voor $y = a'_{n+1}$ (noem die waarde $\mathcal{O}(3)_{a'_{n+1}}$). Beschouw nu de vergelijking $Q(y) = 0$, maar vervang $\mathcal{O}(3)$ door $\mathcal{O}(3)_{a'_{n+1}}$. De oplossing van $Q(y) = 0$ met $\mathcal{O}(3)$ vervangen door $\mathcal{O}(3)_{a'_{n+1}}$ die groter is dan nul en kleiner dan 1 noemen we y_1. Stel de kleinste p vast voor welke geldt dat $|y_1 - a_n| < 10^{-p}$. De hogeregraadstermen zullen dan pas bijdragen aan het p^{e} decimaal van y in $Q(y)$. Breek daarom a'_{n+1} af op $(p-1)$ decimalen, dat is de nieuwe ondergrens a_{n+1}.

Van Ceulen vervaardigde veel numerieke benaderingen van vergelijkingen, ook van hele hoge graad. Hij deed dat onder andere om de eerste 35 decimalen van het getal π te vinden. Welke methode hij daartoe gebruikte is ons onbekend, zoals Praalder ook al zei (zie de passage van Praalder op pagina 53). Mogelijk is één van voornoemde drie methoden de methode van Van Ceulen geweest. Al lijkt het onwaarschijnlijk dat Van Ceulen benaderingen maakte met inklemmen om de 35 decimalen van π te achterhalen, dat zou namelijk minimaal 70 berekeningen betekenen. Een methode als regel Falci of de derde methode van Praalder liggen meer voor de hand. Het is echter niet mogelijk om hier verder een sluitende uitspraak over te doen. Te meer omdat opgemerkt moet worden dat de nauwkeurigheid van de benadering van het getal π allereerst afhankelijk is van het aantal hoeken van de in- en omgeschreven veelhoeken aan de eenheidscirkel.
Het zou erg interessant zijn om precies te achterhalen welke numerieke methode Van Ceulen gebruikte. Echter beschik ik niet over genoeg gegevens om daarover uitspraken te doen. Het is ook niet mijn bedoeling om er verder onderzoek naar te doen in deze scriptie.

4.3 De opgaven 71 tot en met 100

Praalder vond de opgaven 71 tot en met 100 niet interessant genoeg om de uitwerkingen ervan te publiceren, getuige onderstaande passage. De naam van

het hoofdstuk[21] in het boek van Praalder met alle oplossingen is daarmee foutief en zou moeten zijn *Oplossingen der eerste zeventig konstige vraagen van Ludolf van Keulen*.
Het volgende zegt Praalder hierover als verweer om daarmee ook zijn boek af te sluiten:

> AANMERKING.
> De ondervinding zal leeren, dat de 30 Konst-Vraagen, welke LUDOLF op de voorgaande laat volgen gelyk hy zelf zegt, niet zwaar, en in der daad van weinig belang zijn. Want het geheele doelwit, dat LUDOLF door dezelve beöogde, was, om de wortel of waarde van x uit alle hooge Vergelykingen, door benadering, te vinden; dat in den tyd, toen LUDOLF leefde nog als een groot geheim en verborgenheid wierdt gehouden; doch thans, voor allen die de Stelkunde oeffenen, eene geringe zaak is, waar van men hier voor, by de V. KONST-VRAAG, een algemeenen Regel kan vinden, welke in het II. Deel der *Inleidinge tot de Mathematische Weetenschappen*, en by andere Schryvers, onder eene geschikte Leerwyze wordt voorgesteld. Wy zullen daarom ook geen zwarigheid maaken, om die Voorstellen, als van weinig nuttigheid zynde over te slaan, en hier mede de oplossing der Konst-Vraagen van LUDOLF te eindigen.
>
> EINDE[22]

Praalder zegt dat de laatste dertig opgaven weinig interessant zijn, omdat ze gemakkelijk zijn voor hen die geoefend zijn in de stelkunde.[23] Wanneer de vergelijking gevonden is, zou de waarde van x moeten worden gevonden door benadering. Hij voegt daaraan toe dat het in de tijd van Van Ceulen nog niet algemeen bekend was hoe numerieke benaderingen gevonden kunnen worden.

Het is jammer dat Praalder het niet nodig achtte om opgaven 71 tot en met 100 op te lossen of ten minste een aantal van die opgaven. Deze dertig opgaven gaan over handelaren, geld en rente. Bovendien geeft Van Ceulen aan dat er verschillende soorten opgaven zijn; sommigen zijn op te lossen met behulp van een tweedegraadsvergelijking, anderen met een derdegraadsvergelijking. Na bestudering blijkt dat de opgaven inderdaad niet moeilijk zijn, maar dat het soms niet mogelijk is om dezelfde formule te vinden als Van Ceulen deed (waarover later deze paragraaf meer). Over de laatste dertig opgaven zegt Van Ceulen het volgende.

> Dese volghende 30 exempels en zyn niet swaer, Insonderheydt die door de quadraet Cos mogen op-gelost werden: Daerom waer te vergeefs het Facit te stellen, uytghesondert die in Cubic-Cos vallen, ende van velen tot nu onmoghelijck gheachtet: Ick sal u de beantwoordinge schencken, ende dit werck daer mede sluyten.[24]

[21] zie paragraaf 1.2.1
[22] [Praalder, 1790, p. 263-264]
[23] Stelkunde is de verzamelnaam voor dat gedeelte van de rekenkunde "dat algemeene wiskundige voorstellen door vergelijkingen leert oplossen zonder hulp der differentiaal- en integraalrekening; algemeene rekenkunde" (zie [INL GTB, site, trefwoord "stelkunde"])
[24] [Ceulen, 1596, fol 70r]

De laatste dertig opgaven zijn in de ogen van Van Ceulen dus goed te doen. Het vinden van een irrationaal antwoord op een derdegraadsvergelijking wordt door Van Ceulen als moeilijker bestempeld. Daarom geeft hij op die opgaven wel een antwoord. Er zijn twaalf vragen waarop een numerieke oplossing gegeven moet worden bij de laatste dertig opgaven, getuige de decimale antwoorden van Van Ceulen bij deze opgaven.
Praalder vond het in meerdere opzichten goed om opgaven op te lossen, getuige zijn voorwoord van *Gronden der Wiskonst* en de vijfentwintig onopgeloste vraagstukken als aanhangsel aan hetzelfde boek.[25] Hij draagt aan dat verschillende oplossingen op opgaven vriendschappen aan zou kunnen halen en dat het vermakelijk is om opgaven te maken. Dit maakt het des te opmerkelijker dat Praalder het niet nodig achtte om nog enkele opgaven meer op te lossen. Het zou sympathiek zijn als Praalder in ieder geval drie soorten (een tweede-, een derde- en een hogeregraadsvergelijking bijvoorbeeld) zou hebben opgelost voor zijn lezers.
Vanaf pagina 64 vindt u de uitwerkingen van twee opgaven, namelijk opgave 72 en 82. Opgave 72 kan opgelost worden door een tweedegraadsvergelijking op te lossen, maar is verder weinig opmerkelijk. Zoals eerder genoemd zijn er een aantal opgaven waarop wij een ander antwoord zouden geven dan Van Ceulen. Laat ons opgave 82 als voorbeeld nemen. Eerst zal onderzocht worden hoe Van Ceulen deze opgave opgelost moet hebben, alvorens de moderne manier van oplossen te geven (vanaf pagina 64). Een modernere manier van opgave 82 stellen gaat als volgt.
Een koopman heeft 3600 ellen stof van de rol gekocht voor de prijs van 16 penningen per el. Hij verkoopt deze stof door aan drie anderen. De eerste persoon koopt voor 50 pond, afbetaling over 6 maanden. De tweede persoon koopt voor 100 pond en betaalt dit af over 9 maanden. De rest wordt verkocht voor 150 pond en dat wordt afbetaald over 12 maanden tijd. De koopman krijgt van zijn drie afnemers dezelfde rente. Bereken die rente, bereken ook het aantal ellen welke de afnemers elk krijgen en wat ze betaald hebben (zie pagina 64 voor de opgave zoals Van Ceulen hem stelde).

Bij de aanname dat rente zich exponentieel gedraagt, zal de formule die het probleem weergeeft niet hetzelfde zijn als de formule die Van Ceulen vindt. Van Ceulen vindt de vergelijking $48x^3 = 92x^2 + 197x + 72$, waarbij x staat voor hoeveel pond ingezet moet worden om 1 pond rente te ontvangen.
Als er x pond ingezet wordt om 1 pond in een jaar te winnen, zou de groeifactor in de huidige opvatting over rente $\frac{1+x}{x}$ zijn. Daarmee zouden we de volgende vergelijking vinden.

$$\frac{240}{x} + 90 = 100\sqrt[4]{\frac{1+x}{x}} + 50\sqrt{\frac{1+x}{x}}$$

Met de verschillende vergelijkingen vinden we ook significant andere waarden voor prijzen en lengtes van de stof voor de verschillende afnemers dan Van Ceulen. De verklaring daarvoor wordt gevonden in een andere aanname over hoe rente zich verhoudt tot tijd. Wat de opvatting van Van Ceulen is staat beschreven in het tweede boek van *Vanden Circkel* (zie paragraaf 1.1.1). Van Ceulen geeft in dit tweede boek opgaven met hun uitwerking over rentereke-

[25]zie het voorwoord van [Praalder, 1753] en het aanhangsel van hetzelfde boek

ning. In opgave 3 rekent Van Ceulen ons voor hoe een jaarrente moet worden omgerekend naar maandrente. Opgave 3 gaat als volgt.

> 3. Een leendt den ander 504 lb, teghen den penningh 14 in't Jaer 7 maenden. *Vrage* Hoe veel sal den schuldenaer ten eynde des tijts voor Capitael ende ghewin betalen? *Antvvoort.* 525 lb, *Spreect*: In 12 maendē wintmen 1, (Verstaet met 14) hoe veel wint men in 7 maenden? Comt $\frac{7}{12}$. Wijder 14 lb. geleende penningen winnen $\frac{7}{12}$, Wat 504? Facit 21 tot 504, comt 525 lb. voor Capitael ende ghewin/ Besiet her onder het werck.[26]

Van Ceulen zegt hier dat als de rente over een jaar per 14 penningen 1 penning is (modern gezegd is de rente $\frac{1}{14}$ van de aankoopwaarde), dan is de rente over 7 maanden gelijk aan $\frac{7}{12}$ deel van de rente per jaar, ofwel 1 penning per 24 penningen. Dus de rente die betaald moet worden over 504 pond is $\frac{504}{24} = 21$ pond. Daarmee moet de "schuldenaer" $504 + 21 = 525$ pond betalen. Merk op dat de rente zich in deze uitwerking van Van Ceulen zich lineair verhoudt tot de tijd.

Wanneer we nu naar deze opvatting over rente een functie opstellen die hoort bij de waarde van de stukken stof die de handelaren afnemen bij de koopman in opgave 82, moet gelden dat de rente over negen maanden $\frac{3}{4}$ pond is per x ponden, dat komt overeen met 1 pond per $\frac{4}{3}x$ ponden. De tweede handelaar moest over negen maanden 100 pond betalen. Stel dat de stof die hij afnam een waarde had van b ponden, dan krijgt de koopman een in totaal $\frac{3}{4x}b+b$ pond over 9 maanden. De waarde van de stof is daarmee gelijk aan $b = 100\frac{4x}{4x+3} = \frac{400x}{4x+3}$. Door ook voor de andere twee handelaren te berekenen hoe veel hun deel van de stof waard was, volgt een vergelijking voor x.

$$\frac{100x}{2x+1} + \frac{400x}{4x+3} + \frac{150x}{x+1} = 240.$$

Deze vergelijking kan worden herschreven tot de vergelijking welke Van Ceulen vond. Oplossen levert dat de enige positieve oplossing is $x = 3,2986954$, dit is dezelfde benadering als welke Van Ceulen vond. Op pagina 65 staat in tabel 4.3 welk aantal el stof de handelaren afnamen en welke prijzen daarbij horen.

We hebben kunnen constateren dat Van Ceulen uit ging van lineaire rente. De huidige opvatting is rente op rente; dat houdt in dat rente exponentieel toeneemt. Het is mogelijk dat Praalder ook een andere opvatting had over rente dan Van Ceulen en mogelijk daarom de laatste dertig opgaven niet wenste uit te werken. Om hier definitieve uitspraken over te doen, is het nodig om onderzoek te verrichten naar de opvattingen over rente in de tijd van Praalder.

In paragraaf 3.4.1 lazen we dat Van Ceulen in zijn opgaven over rekenkundige rijen de elementen uit de rij termijnen noemt. Rekenkundige rijen gedragen zich lineair net zoals rente in de opvatting van Van Ceulen. Het zou kunnen dat dit een verband is, namelijk als rente zich lineair zou verhouden, heeft rente op een vaste intervallen de vorm van een rekenkundige rij.

[26][Ceulen, 1596, fol 78v]

Met het inzicht dat Van Ceulen rente als een lineair proces beschouwt, hoeven niet alle opgaven 71 tot en met 100 anders opgelost te worden. Sterker nog, afgaande op de uitwerkingen in het tweede boek van *Vanden Circkel*, zouden wij op opgaven 71 tot en met 75 hetzelfde antwoord geven als Van Ceulen. Op de opgaven 83 tot en met 88, 93, 94 en opgave 100 zouden wij ook hetzelfde antwoord geven als Van Ceulen deed, deze opgaven gaan niet over rente. Als de werkelijke reden dat Praalder de laatste dertig opgaven niet oploste was vanwege de verschillende opvatting over rente, had Praalder er ook voor kiezen om slechts opgaven 76 tot en met 82, 89 tot en met 92 en 95 tot en met 99 niet op te lossen en de anderen wel. Elke lezer van het werk van Praalder kan zien dat de reden die Praalder aandraagt om de laatste dertig opgaven niet op te lossen zwak is. Van de eerste zeventig opgaven zijn er namelijk zestig die met stelkunst worden opgelost door Praalder.
Wanneer de lezer van het werk van Praalder ook in het bezit is van het tweede boek van *Vanden Circkel*, kan net als wij achterhalen dat Van Ceulen een afwijkende definitie van rente hanteert. Praalder had zijn werk ook af kunnen sluiten met de dan geldende opvattingen over rente, als die werkelijk verschilde met die van Van Ceulen.
Enkel opgaven 84 en 88 dienen numeriek beantwoord te worden, echter geeft Van Ceulen op opgave 84 ook de irrationale oplossing wat een extra reden zou kunnen zijn om deze opgave juist wel te behandelen (zie paragraaf 3.2.1).

Uitwerkingen van opgaven 72 en 82

Opgave 82 is een voorbeeld van een opgave die numeriek opgelost dient te worden. Tevens is dit een opgave die Van Ceulen anders oploste dan wij tegenwoordig zouden doen door een verschil in opvatting van rente. Hoe wij deze opgave op zouden lossen staat hieronder uitgewerkt. Hoe de opgave modern gesteld wordt staat op pagina 62.

> 82. . Eener heeft gecocht 3600 ellen Lindewaet, voor 16 d. d'elle, hy vercoopt die weder aen drie ander persoonen, den eersten een deel voor 50 lb., te betalen over 6 maenden, den tweeden een deel voor 100 lb., te betalen over 9 maenden, de reste, den derden voor 150 lb. te betalen over 12 maenden, ende wint van elck, met 100 int Jaer, even veel. *Vraghe*, Hoe veel ellen elck van drien ghecocht heeft, ende hoe duer, ende den gemeenen Interest, ten 100 int Jaer? Dese schijnt slecht, maer een groote Cunst op te lossen. Ick sette hier dat met 1℞ lb., een lb. int Jaer gewonnen is, eñ procedeer naert behooren, vinde 48 ℭ ghelijck 92𝔷 + 197℞ + 72. Facit 1℞3$\frac{2986954}{10000000}$, met soo veel is 1 int Jaer gewonnen, dat is met 100 30$\frac{315014}{1000000}$. De eerste heeft gecocht 651$\frac{281898}{1000000}$ ellē. Den tweedē 1222$\frac{132716}{1000000}$. Den derden 1726$\frac{585386}{1000000}$ ellen. Ghy moeght het selve proeven, sult vinden dat het in alle proeven alsoo bestaet, dat het gheen hair-breedt van der mate, noch geen hondertste deel van een mijte aen gelde te veel ofte te weynich comen sal, &c.[27]

Zonder rekening te houden met welke opvattingen anderen eropna hielden, zouden we de opgave tegenwoordig bijvoorbeeld als volgt aanpakken.

[27] [Ceulen, 1596, fol 70v-71r]

Kies x de rentefactor over drie maanden, dus $1 < x$. De eerste afnemer moest 50 ponden betalen over 6 maanden, dus hij kocht stof met een waarde van $\frac{50}{x^2}$ ponden. De waarde van de stof welke de andere afnemers kochten hierbij opgeteld moet samen 240 zijn; dat is de waarde van de stof zoals de eerste handelaar die kocht (3600 ellen voor 16 penningen per el). Er moet gelden dat

$$\frac{50}{x^2} + \frac{100}{x^3} + \frac{150}{x^4} = 240. \tag{4.1}$$

Deze functie is te schrijven als een vierdegraadsvergelijking, namelijk $5x^2+10x+15 = 24x^4$. Deze vergelijking heeft een oplossing voor $x \approx 1,06964$, de rente die de koopman heft per drie maanden is dus ongeveer $7,0\%$.
Afnemer 1 heeft ongeveer $\frac{50}{x^2}$ pond betaald, dat is afgerond $43,70$ pond. Dat is ongeveer $0,182088^{\text{ste}}$ deel van 240 pond, dus heeft de eerste afnemer $655,517$ el gekocht. Hoeveel ellen stof de afnemers kochten staat in tabel 4.3 evenals de waarde van de afgenomen stof, zowel de waarden die Van Ceulen vond als de waarden die wij tegenwoordig zouden vinden.

	Waarden volgens moderne uitwerking		Waarden van Van Ceulen	
Afnemer	waarde	el	waarde	el
1	43,70	655,52	43,42	651,28
2	81,71	1225,67	81,48	1222,13
3	114,59	1718,81	115,11	1726,59
Koopman	240,00	3600,00	240,01	3600,00

Tabel 4.3: Antwoorden bij opgave 82

Opgave 72 is een voorbeeld van een opgave waarop wij hetzelfde antwoord verkrijgen als Van Ceulen, ondanks dat hij een andere opvatting over rente had dan wij.

> 72. . Een last Rogghe wert vercocht voor $15\frac{1}{9}$ lb. vlaems[28]/ ende men wint met 100 soo veel als een last ghecost heeft. *Vraghe*, Hoe veel is voor een last betaelt?[29]

Deze opgave kan vrij vertaald worden naar: Een last rogge wordt voor $\frac{136}{9}$ Vlaamse ponden verkocht. Per honderd ponden wordt er een winst gemaakt gelijk aan de prijs die de rogge gekost heeft. Vraag: Hoeveel werd er voor de rogge betaald?
De oplossing gaat als volgt. Stel x voor de prijs die de rogge waard was voordat het weer werd verkocht, dan is $\frac{136}{9}$ ponden gelijk aan $100+x\%$ van het aankoop bedrag. Honderd procent van het aankoop bedrag, x, is dus gelijk aan

$$x = \frac{136 \cdot 100}{9(100+x)}.$$

Daaruit volgt een tweedegraadsvergelijking, welke twee reële oplossingen heeft, namelijk $x = -50 \pm \frac{190}{3}$. Als x een getal kleiner dan nul is, was de rogge eerst minder dan niets waard. Dat is een onwaarschijnlijke situatie, dus mogen we

[28] uitleg over oude munten en andere maten, zoals een el, staat beschreven in paragraaf 4.4
[29] [Ceulen, 1596, fol 70v]

aannemen dat $x \geq 0$; dus moet x gelijk zijn aan $\frac{40}{3}$. Daarmee heeft de rogge eerst ongeveer $\frac{120}{9}$ Vlaamse ponden gekost en heeft de handelaar een winst gemaakt van $\frac{136}{9} - \frac{120}{9} = \frac{16}{9}$ Vlaamse ponden.

4.4 Oude maten

Van Ceulen gebruikte in zijn boek *Vanden Circkel* de afkortingen lb., s., en d. geschreven in sierlijke letters. Vanaf de dertiende eeuw tot tijdens de Franse Revolutie (met de komst van decimaal stelsel bij de munt) werden geldbedragen meestal aangeduid met de libra/pond (lb.), solidus/schelling (s.) en denarius/penning (d.).[30] De verhoudingen tussen deze rekenmunten waren als volgt: 1 lb. = 20 s. en 1 s. = 12 d.[31] Heel lang is de penning, ook wel aangeduid met halve duit, het meest gangbare kleingeld geweest.[32]

In de opgaven 1 tot en met 9 en 12 van Van Ceulen is de lengte-eenheid "roede". Een roede is echter geen eenduidige lengtemaat, zoals de huidige meter. De Rijnlandse roede komt overeen met 3,767 m, maar de Blooise, de Drentse, Duivenlandse en de Schouwse roede werden ook gebruikt en variëren in meters van 3,617 tot 4,12. Een roede kan trouwens ook een oppervlakte betekenen, dan was een roede gelijk aan 14 m^2. De lengtemaat roede wordt niet meer gebruikt.[33]

Ook de el is een niet eenduidige lengte-eenheid. De el is afgeleid van de ellepijp, een bot in de onderarm. Een el is rond de 60 centimeters lang.[34] Ook de duim is afgeleid van een lichaamsdeel, een duim is ongeveer zo groot als het bovenste kootje van de duim breed is. Een duim is ongeveer 2,5 cm lang, afhankelijk van de plaats waar men zich bevindt; de Amsterdamse duim is kleiner dan de Franse duim.[35]

In opgave 75 worden nog wat oude maten en eenheden gebruikt door Van Ceulen, namelijk "last", "zak", "achtendeel" en "vierling".

> *Nota*, een sack doet 3 achtendeel, een achtendeel doet 4 vierling.[36]

Hoeveel zakken een last bevat is de vraag in opgave 75. Volgens opgave 75 moeten er ongeveer 1,2669 zakken in een last zitten.

[30] [Gelder, 1980, p. 27]
[31] [Gelder, 1980, p. 265-269]
[32] [Gelder, 1980, p. 260]
[33] [Dumont, site], [Rowlett, site] zie de items "rod", "roede", "rood(1)" en "rood(2)"
[34] [INL GTB, site, trefwoord "el"]
[35] [INL GTB, site, trefwoord "duim"]
[36] [Ceulen, 1596, fol 70v]

Hoofdstuk 5

Mengelwerk

Tijdens het bestuderen van *L. van Keulen's wiskundige voorstellen opgelost* kwamen enkele zaken aan het licht die een verklaring behoeven. Eigenaardigheden rondom verwijzingen en voetnoten kunnen verklaard worden aan de hand van het verschijnen van Praalder's werk in het tijdschrift *Oeffenschool der Mathematische Weetenschappen* van Strabbe in het jaar 1771 (zie ook paragraaf 1.2.2). In dit hoofdstuk zullen we kijken naar sommige voetnoten die vreemd lijken. Het gaat om de voetnoten op pagina's 9, 17, 157 - 159 en 162 bij opgaven 2 en 57. Bij opgave 57 wordt Praalder in derde persoon aangeduid (zie paragraaf 3.3).[1] Opgave 2 wordt door Praalder op drie verschillende manieren opgelost en er wordt even zo vaak verwezen naar dezelfde stelling op verschillende plaatsen (zie paragraaf 2.1).[2] Opmerkelijk zijn ook verwijzingen die veelvuldig voorkomen bij de eerste twaalf opgaven, maar niet bij de andere achtentachtig.

Bij de uitwerkingen van de eerste 12 opgaven wordt veel gebruik gemaakt van verwijzingen naar stellingen in *Gronden der Meetkunst*. Het is niet zo vreemd dat daarna niet meer verwezen wordt naar datzelfde boek, omdat de andere achtentachtig opgaven niet opgelost dienen te worden met meetkunde. Toch is het wel opvallend dat er bijna niet meer wordt verwezen bij de andere achtenvijftig opgaven die Praalder oploste, al wordt er wel verwezen naar opgaven en vaak ook hun uitwerkingen in werken van Wilkens en De Graaf. Voor wiskundige handelingen of stellingen verwijst Praalder slechts op pagina 177 naar Simon Panser en zijn *Mathematische rariteitkamer of algebra*, op pagina 148 naar Wouter Verstap en Ferguson met respectievelijk *Arithmetica Philosophica* en *Labyrinthus Algebrae*, op pagina 184 en 250 naar De Graaf naar *Inleiding tot de Wiskunst*[3] en ten slotte naar de manier van Fermat welke staat beschreven in het tijdschrift *Mathematische liefhebbery* op pagina 222.
Het is erg aannemelijk dat Praalder zijn uitwerkingen van de meetkundige ondersteunde met verwijzingen. Als Praalder graag wilde dat zijn werk zou worden gepubliceerd in *Oeffenschool der Mathematische Weetenschappen*, heeft hij mogelijk expres veel verwijzingen geplaats naar het werk van Strabbe, terwijl hij ook vaker had kunnen verwijzen naar het werk van De Graaf. Vreemd blijft

[1] [Praalder, 1790, p. 157]
[2] [Praalder, 1790, p. 9-21]
[3] Praalder verwijst willekeurig naar De Graaf, *Inleiding tot de Wiskunst* of *Algebra*; toch wordt hetzelfde boek bedoeld

echter wel het grote verschil in aantal verwijzingen tussen de eerste twaalf en de andere achtenvijftig opgaven.

In de voetnoot op pagina 157 staat dat Praalder (in derde persoon) nooit het werk van Twilt heeft gezien, terwijl in de voetnoot op pagina 158 en 159 letterlijk geciteerd wordt uit het werk van Twilt. Bovendien wordt in de voetnoot op pagina 162 een volledige verwijzing naar een passage in het werk van Twilt gegeven. Strabbe moet de voetnoot toegevoegd hebben met de passage uit het werk van Twilt.[4] Het is onduidelijk of Praalder aan Strabbe vertelde dat hij het werk van Twilt nooit gezien heeft, of dat Strabbe dat aannam.

Praalder lost opgave 2 op drie manieren op, bijzonder is dat in de uitwerking op drie verschillende manieren wordt verwezen naar dezelfde stelling; de stelling van Ptolemeus. Praalder stelt de stelling als Lemma zonder naam. In een voetnoot staat staat het volgende.

> Dit *Theorema* is ook te vinden in de *Gronden der Meetkunst* Boek III. *Theor.* XVII., en aldaar op een andere wyze betoogd.[5]

Dit is één van de drie keer dat de volledige titel van het boek wordt genoemd (zie paragraaf 2.1).
Praalder bewijst deze stelling en verwijst ernaar in zijn eerste twee uitwerkingen. In de derde uitwerking verwijst hij in de tekst naar

> [...] het *Theorema* van *Ptolomëus*, dat men beweezen vindt by A. DE GRAAF *Inleiding tot de wiskunst* pag. 295.[6]

Het lijkt vreemd om naar een ander werk te verwijzen als Praalder zelf al een kloppend en volledig bewijs gegeven heeft van dezelfde stelling. Het is daarmee waarschijnlijk dat ten minste de voetnoot op pagina 9 door Strabbe is toegevoegd.

Opvallend feit is dat Strabbe in de eerste band van *Oeffenschool der Mathematische Weetenschappen* de methode van Cardano behandelt.[7] Het is zeer waarschijnlijk dat Praalder die eerste band gelezen heeft aangezien Praalder ook op de hoogte was van het bestaan van het werk *Gronden der Meetkunst*. Toch gebruikt hij de methode van Cardano niet als hij derdegraadsvergelijkingen op lost, verwijst er zelfs niet naar.

4[Praalder, 1790, p. 157]
5[Praalder, 1790, p. 9]
6[Praalder, 1790, p. 17]
7[Strabbe, 1770a, voorreden]

Conclusie

Van Ceulen gaf in het jaar 1596 zijn werk *Vanden Circkel* uit (zie paragraaf 1.1.1). In het tweeëntwintigste hoofdstuk formuleerde hij honderd opgaven. Sommigen daarvan worden direct gevolgd door een korte hint, uitwerking en/of het antwoord. De honderd opgaven zijn onder te verdelen in drie vakgebieden, namelijk meetkunde, algebra en numerieke analyse. Hoe de opgaven precies verdeeld zijn is weergegeven in een tabel in bijlage A.
In het jaar 1771 stond in het tijdschrift *Oeffenschool der Mathematische Weetenschappen* een werk van Praalder onder de titel *Byvoegsel tot het Mengel-werk*. In de jaren 1777 en 1790 werd het werk van Praalder uitgegeven als zelfstandig boek (zie paragrafen 1.2.1 en 1.2.2). Het boek bevat de uitwerkingen van de eerste zeventig opgaven van Van Ceulen uit het tweeëntwintigste hoofdstuk van *Vanden Circkel*.

Van de meetkundige vragen loste Praalder de opgaven 1 tot en met 4, 10 en 11 hetzelfde op zoals Van Ceulen voor ogen moet hebben gehad (zie hoofdstuk 2). Opgaven 7 tot en met 12 gaan over transformaties van veelhoeken. Praalder loste de opgaven 7, 8, 9 en 12 niet op zoals Van Ceulen bedoeld moet hebben (zie paragraaf 2.2), wat daarvan de reden is, is onbekend. Van Ceulen geeft in zijn boek *Vanden Circkel* tussen de opgaven 6 en 7 uitleg over hoe een veelhoek getransformeerd kan worden naar een driehoek, waarbij de oppervlakte hetzelfde blijft. Opvallend is dat Praalder uit de tekst van Van Ceulen niet lijkt te begrijpen dat de theorie hoort bij de opgaven 7 tot en met 12 en hij de oppervlaktes van de veelhoeken transformeert naar een vierkant (zie paragraaf 2.2.1). Alhoewel Praalder zijn veelhoeken ook naar een driehoek met dezelfde oppervlakte transformeert, op dezelfde wijze als Van Ceulen, alvorens deze naar een vierkant te transformeren vindt hij geen getal als antwoord. Het is onduidelijk waarom Paraalder met zijn meetkundige oplossing geen getal als antwoord vindt, want ook door te transformeren naar een vierkant in plaats van een driehoek is dat mogelijk bij de opgaven 7 tot en met 9 en 12.
In de uitwerkingen door Praalder van de meetkundige opgaven staan veel verwijzingen naar het boek *Gronden der Meetkunst* van Strabbe. Deze verwijzingen zijn zeer aannemelijk van de hand van Praalder. Strabbe heeft informatieve voetnoten geplaatst in het werk van Praalder toen hij het werk geschikt maakte voor publicatie in *Oeffenschool der Mathematische Weetenschappen* (zie paragraaf 1.2.2 en hoofdstuk 5).

De achtenvijftig algebraïsche opgaven zijn onder te verdelen in opgaven over machten van rationale getallen, vergelijkingen van graad 3, vergelijkingen van graad kleiner gelijk twee en rijen (zie hoofdstuk 3).

Opgave 57 van Van Ceulen is dezelfde als opgave 16 van Diophantes en is lange tijd onopgelost gebleven. In deze opgave is het de opdracht om drie getallen te vinden ($a,\ b$ en $c\ \in \mathbb{Q}$) waarvoor geldt dat ieder getal afzonderlijk afgetrokken van de derde macht van de som van de drie getallen ($a+b+c = s,\ s^3-a$) een derde macht oplevert van een rationaal getal ($\sqrt[3]{s^3-a},\ \sqrt[3]{s^3-b}$ en $\sqrt[3]{s^3-c} \in \mathbb{Q}$). Van Ceulen lukte het om ten minste twee antwoorden te vinden op deze opgave, de manier waarop hij één van die antwoorden vond staat beschreven in een brief welke hij stuurde aan N. Huybertszoon van Percyn in het jaar 1610. Praalder beschreef de methode van Van Ceulen op een iets algemenere wijze in zijn boek. Ook beschreef Praalder een lichtelijk elegantere versie van de methode van Abraham de Graaf. Deze methode is algemener dan de methode van Van Ceulen, want met deze tweede methode worden antwoorden gevonden die niet gevonden kunnen worden met de methode van Van Ceulen, terwijl andersom wel (zie paragrafen 3.3 en 3.3.1).

Zeven opgaven van Van Ceulen dienen opgelost te worden door een oplossing te vinden van een derdegraadsvergelijking. Zes van deze opgaven staan tussen de eerste zeventig opgaven en zijn eenvoudig op te lossen door een voor de hand liggende oplossing weg te delen. Praalder loste al deze zes opgaven zo op en maakte geen opmerking over de oplosbaarheid met de methode van Cardano en Ferrari (zie paragraaf 3.2). De methode van Cardano en Ferrari geeft ons een algemene manier om derde- en vierdegraadsvergelijkingen algebraïsch op te lossen (zie paragraaf 3.2.1). Van Ceulen zegt, als hij de laatste dertig opgaven inleidt, dat de opgave welke gebruik maakt van een "Cubic-Cos" tot voor kort niet irrationaal opgelost konden worden. Dat is voor Van Ceulen de reden dat hij op voornoemde opgave 84 het enige antwoord in irrationalen geeft. Van Ceulen was dus in staat een irrationaal antwoord op een derdegraadsvergelijking te vinden met behulp van de methode van Cardano en Ferrari. Hier moet het woord irrationaal gelezen worden in de oude betekenis van het woord; Van Ceulen noemde een getal irrationaal als het niet als breuk geschreven kan worden, maar volstaan kan worden met gebroken machten van rationale getallen. De methode van Cardano en Ferrari zou een complex antwoord leveren op deze zes opgaven, omdat er meer dan één wortel of nulpunt is op de derdegraadsvergelijking. Het zou kunnen dat dit de reden is dat Praalder geen van deze opgaven oplost met de methode van Cardano en Ferrari. Praalder moet de methode wel gekend hebben, want die methode staat beschreven in de eerste band van *Oeffenschool der Mathematische Weetenschappen* (zie hoofdstuk 5).

De zeventien opgaven over rijen die Praalder oploste kunnen onderverdeeld worden in drie opgaven over rekenkundige rijen, elf opgaven over meetkundige rijen en drie opgaven over driehoeksgetallen (zie paragraaf 3.4). Vier van de opgaven over meetkundige rijen werden opgestuurd aan Van Ceulen door een collega wiskundige. Op drie van die opgaven is tenminste één van de drie getallen van het antwoord kleiner dan nul. Daarom vindt Van Ceulen de vierde opgave het "geschikst" van deze vier (zie paragraaf 3.4.3). Praalder was zich ervan bewust dat Van Ceulen negatieve getallen niet als antwoord accepteerde. Van Ceulen vond negatieve antwoorden geen geschikte oplossing, mogelijk vanwege de relatie die wiskundigen in de tijd van Van Ceulen zagen tussen meetkunde en algebra (zie paragraaf 3.2, in het bijzonder pagina 33). Of Praalder wist waarom negatieve antwoorden niet als voldoende beschouwd werden door Van Ceulen is niet duidelijk. Opmerkelijk aan de uitwerkingen van Praalder is dat hij aan zijn werk werk de vier opgaven over meetkundige rijen algemeen gaat oplossen. Als aanleiding daartoe neemt Praalder vier soortgelijke opgaven van Marten Wilkens, een collega wiskundige van Praalder. De vier opgaven van Marten Wilkens zijn identiek aan die van Van Ceulen met als enige verschil dat de opvolgende getallen anders gekozen worden. Praalder maakte zijn algemene oplossing zo algemeen dat hij daarmee het antwoord kan geven op alle acht opgaven. Dat rekent hij ons voor om vervolgens nog drie eigen opgaven te verzinnen en op te lossen met dezelfde algemene oplossing (zie paragraaf 3.4.3). Dat is in tegenstelling met enkele andere punten in zijn werk, waar zijn uitleg erg summier is, bijvoorbeeld als hij het trekken van de Pronikwortel (zie paragraaf 3.4.2) en de regel Falcis uitlegt (zie paragraaf 4.2). De uitleg over Pronikgetallen en de Pronikwortel trekken geeft Praalder bij de opgaven over driehoeksgetallen. Hij deed dit echter door enkel één getallenvoorbeeld te geven, waardoor onduidelijk blijft wat de algemene manier is (zie paragraaf 3.4.2).

Tussen de eerste zeventig opgaven geeft Van Ceulen twee opgaven op waarop een numeriek antwoord wordt verwacht. Deze twee opgaven gaan over de lengtes van de zijden van stukken land. Bijzonder aan deze opgaven is dat bij het opstellen van een vergelijking lengtes en oppervlaktes bij elkaar opgeteld moeten worden. Meetkundig is dat niet voor te stellen (zie paragraaf 4.1).
Praalder legt in zijn boek drie verschillende numerieke methodes uit om een decimaal antwood te verkrijgen bij een hogeregraadsvergelijking. De eerste manier wordt op het huidige voortgezet onderwijs onderwezen als inklemmen. De tweede methode noemt Praalder de regel Falcis en gaat net iets anders dan Regula Falsi, een algemene methode van benaderen. De derde methode is snel en erg algemeen. De uitleg van Praalder over de regel Falcis is echter verre van algemeen, voor iemand die de methode niet kent, is het een hele klus om uit de uitleg van Praalder de methode te ontdekken (zie paragraaf 4.2). Dit in tegenstelling tot het eerdere werk van Praalder *Gronden der Wiskonst*, waar elke stelling gevolgd wordt door een getallenvoorbeeld en het bewijs. In hetzelfde werk wordt elke uitleg vergezeld van een korte uitleg over welke getallen gecombineerd worden om tot nieuwe getallen te komen en wat het nieuwe getal betekent (zie paragraaf 1.2).

Praalder werkt de laatste dertig opgaven van Van Ceulen niet uit. Volgens eigen zeggen deed hij dat omdat de opgaven allemaal handelen om het vinden van een algebraïsche vergelijking en met behulp daarvan door benadering de waarde van de onbekende. Dat is echter niet waar, slechts een deel van de opgaven handelen om het vinden van een numerieke benadering, één opgave kan opgelost worden met de methode van Cardano en Ferrari en de andere opgaven zijn op te lossen met behulp van een tweedegraadsvergelijking, dus niet numeriek.
Van Ceulen hanteerde een andere definitie van rente dan wij tegenwoordig doen. Mogelijk is dat de werkelijke reden dat Praalder de laatste dertig opgaven niet oploste (zie paragraaf 4.3). Het moet echter nader onderzocht worden hoe Praalder en zijn tijdgenoten rekenden met rente om hier definitief een uitspraak over te kunnen doen.
Er is één opgave waarop Van Ceulen een irrationaal antwoord geeft door een derdegraadsvergelijking op te lossen, opgave 84. Hij deed dat zonder twijfel met behulp van de methode van Cardano. Deze opgave zouden wij niet anders oplossen dan Van Ceulen deed, mogelijk Praalder wel als gevolg van een andere

opvatting over rente. Hoe dan ook, het is erg interessant dat Van Ceulen een irrationaal antwoord geeft op een derdegraadsvergelijking.
Niet alle laatste dertig opgaven gaan over rente. Zo gaan er twee over een meetkundige rij en staan er veel koopmansraadsels tussen (opgaven over handel, maar zonder renterekening). Praalder had al deze opgaven aan kunnen grijpen om nog meer wiskunde uit te leggen. Als de werkelijke reden dat hij de laatste dertig opgaven niet oplost de verschillende kijk op rente is, had het meer voor de hand gelegen als Praalder dat had gezegd. Nu heeft Praalder de laatste dertig opgaven te kort gedaan door ze op één hoop te vegen.

Bij het stellen van opgave 12 noemen Van Ceulen en Praalder niet alle lengtes die nodig zijn bij het oplossen. In *Vanden Circkel* staan de benodigde lengtes afgebeeld in het bijbehordende figuur. Praalders figuur bevat deze waarden niet. Mogelijk ging Praalder ervan uit dat zijn lezers ook het werk van Van Ceulen bezaten. Dat is een erg onwaarschijnlijke aanname omdat Praalder waarschijnlijk niet mikte op een vermogende doelgroep. Als Praalder toch ervan uitging dat zijn lezers ook het werk van Van Ceulen tot hun beschikking hadden, lijkt het vreemd dat Praalder niet de laatste dertig opgaven oploste (of een bevredigende reden omdat niet te doen aan draagt) en hij veelhoeken transformeert naar vierkanten in plaats van driehoeken zoals Van Ceulen deed.

Doelgroep en medium

Het is erg aannemelijk dat Praalder een doelgroep voor ogen had welke iets te maken heeft met onderwijs, getuige zijn inzet voor het PUG en later het Nut (zie paragraaf 1.2). Maar ook het medium (boekvorm of tijdschirft bijvoorbeeld) via welke de uitwerkingen van de eerste zeventig opgaven uitgegeven werden doet vermoeden dat de doelgroep van Praalder met onderwijs te maken moet hebben. De uitwerkingen van Praalder zagen voor het eerst het licht in het jaarlijkse boek *Oeffenschool der Mathematische Weetenschappen*, uitgegeven bij Morterre in Amsterdam. *Oeffenschool der Mathematische Weetenschappen* werd uitgegeven om geïnteresseerden in de gelegenheid te stellen zich te bekwamen in de wiskunde (zie paragraaf 1.2.2). Mogelijk wilde Praalder graag bijdragen aan die doelstelling van de *Oeffenschool der Mathematische Weetenschappen*. Het is natuurlijk ook mogelijk dat Praalder zijn uitwerkingen al uit wilde geven, maar er niet het kapitaal voor had (Praalder dacht voortdurend dat hij te weinig geld had, zie paragraaf 1.2).

Mogelijke doelgroepen om een dergelijk werk voor te schrijven zijn leerlingen in de wiskunde, collega-docenten of liefhebbers. Als Praalder schreef voor leerlingen in de wiskunde, moet het werk opgevat worden als een soort nakijkwerk waarin tevens materiaal aangereikt wordt om zich verder te bekwamen. Echter in ogenschouw nemend dat het werk *Gronden der Wiskonst* didactischer is dan zijn latere werk *L. van Keulens voorstellen opgelost*, lijkt het onwaarschijnlijk dat Praalder schreef voor leerlingen in de wiskunde. Namelijk in *Gronden der Wiskonst* geeft Praalder na elke stelling een getallenvoorbeeld waarin hij duidelijk aangeeft wat hij berekent en op welke manier. Vervolgens bewijst hij de stelling op een erg algemene manier, met veel verschillende variabelen om te voorkomen iets te moeten aannemen of algemeniseren (zie paragraaf 1.2). Iets

wat hij niet doet in zijn latere werk, bijvoorbeeld bij de uitleg over Pronikwortel, Pronikgetal en regel Falcis.
Voor collega's in het onderwijs is het werk van Praalder interessant, omdat er leuke opgaven met uitwerkingen staan in dit werk uit heel verschillende vakgebieden. Daarnaast worden sommige opgaven op verschillende manieren opgelost, wat de docent de mogelijkheid geeft om te kiezen, maar het ook makkelijker maakt om leerlingen te begeleiden als zij een andere, maar juiste oplossing gevonden hebben. Ook deze aanname is niet erg waarschijnlijk, omdat de uitleg van Praalder op sommige plaatsen erg summier is. Als dit werk uitgegeven werd voor liefhebbers van de wiskunde, worden zij overladen met leuke opgaven welke in sommige gevallen ook nog op een andere manier opgelost kunnen worden dan ze hier opgelost staan. Het is duidelijk dat Praalder enthousiast is over het oplossen van de opgaven van Van Ceulen, dat maakt deze aanname het meest waarschijnlijk.

Gezien het medium waarin het werk van Praalder verscheen, zijn al deze drie doelgroepen mogelijk. Daarmee is echter niet gezegd dat Praalder schreef om te publiceren in *Oeffenschool der Mathematische Weetenschappen*. Echter, omdat Praalder veel verwijzingen plaatste naar het werk *Gronden der Meetkunst* van Strabbe, lijkt het erg aannemelijk dat Praalder hoopte dat zijn werk onderdeel zou worden van *Oeffenschool der Mathematische Weetenschappen* van de hand van Strabbe.

Praalder's mening

Het is moeilijk om uit de teksten van Praalder op te maken hoe hij dacht over Van Ceulen en zijn tijdgenoten. Praalder was er wel van overtuigd dat Van Ceulen een erg goede wiskundige was. Dat mag opgemaakt worden uit bijvoorbeeld de overtuiging dat Van Ceulen een algemene oplossingsmethode had voor opgave 57, in tegenstelling tot wat Twilt beweerde. Twilt beweert in zijn werk *Toet-steen van d'Algebra Spetiosa* dat Dirk den Hollander de eerste was met een algemene oplossingsmethode (zie paragraaf 3.3). Praalder verzuimt echter om aan te tonen dat de methode van Van Ceulen algemeen is, hij vindt slechts één antwoord, welke hetzelfde is als het eerste antwoord van Van Ceulen (zie paragraaf 3.3.1). Praalder was op de hoogte van het tweede antwoord dat Van Ceulen gaf, hij drukte dat namelijk ook af in zijn eigen werk. Door aan te tonen hoe Van Ceulen het tweede antwoord gevonden moet hebben, had Praalder aannemelijk kunnen maken dat de manier van Van Ceulen algemeen is.
Daarnaast is Praalder lovend over hoe veel benaderingen Van Ceulen maakte in zijn boeken *Vanden Circkel* en *De Fondamenten*, en hij is ervan overtuigd dat benaderingen in de tijd van Van Ceulen veel moeilijker werden gevonden dan in zijn eigen tijd (zie de citaten uit het werk van Praalder in hoofdstuk 4 en paragraaf 4.3).

Praalder is zich er bewust van dat Van Ceulen geen negatieve getallen als antwoord accepteert, maar weet mogelijk niet waarom dat zo is. Zo denkt Praalder dat Van Ceulen opgave 6 makkelijker bestempelt dan opgave 5 omdat de benadering van het antwoord dichter bij een geheel getal ligt. Het is echter veel aannemelijker dat Van Ceulen opgave 6 makkelijker vond omdat het kleinste positieve antwoord op de vergelijking gelijk ook aan de opgave voldoet. Terwijl het kleinste positieve antwoord bij opgave 5 niet voldoet, omdat de stukken land dan negatieve lengtes hebben. Praalder was zich er wel van bewust dat Van Ceulen en zijn tijdgenoten negatieve antwoorden niet zonder twijfel juiste antwoorden vonden getuige de opmerkingen bij de opgaven 37 tot en met 40. Van Ceulen geeft aan dat hij de antwoorden op de opgaven 37, 38 en 39 niet „geschikt" vindt. De reden waarom hij dat vindt, constateert Praalder, is mogelijk dat de antwoorden „negatieve surden" zijn, ofwel negatieve irrationale getallen. Overigens meldt Praalder niet waarom hij denkt dat Van Ceulen negatieve getallen mogelijk geen juiste oplossing vindt (zie ook paragraaf 3.4.3).

Op twee plaatsen lijkt Praalder zijn mening te geven over tijdgenoten van Van Ceulen. Bij de eerste vier opgaven zegt Praalder dat deze opgaven moeilijk waren in de tijd van Van Ceulen. Dat is in tegenspraak met de ondertitel die Van Ceulen gaf aan het tweeëntwintigste hoofdstuk van *Vanden Circkel* (zie paragraaf 2.1) waarin Van Ceulen juist zegt dat de opgaven niet moeilijk zijn, maar leuk voor de echte liefhebbers van de wiskunde (zie paragraaf 1.1.1). Waarop Praalder zijn mening baseert vertelt hij niet.
Over de numerieke methode van Van Ceulen en zijn tijdgenoten zegt Praalder dat hij die niet kent. Hij zegt overtuigd te zijn dat Van Ceulen en enkele tijdgenoten wel een numerieke methode hadden (zie hoofdstuk 4). Waar Praalder zijn uitwerkingen afsluit voegt hij toe dat in de tijd van Van Ceulen numerieke benaderingen maken nog een groot geheim was (zie paragraaf 4.3). Dat lijkt lichtelijk met elkaar in tegenspraak.
Van Ceulen had het voornemen om zijn numerieke methode te publiceren in zijn nog te verschijnen Coss-boek, evenals de manier om kubische vergelijkingen algebraïsche op te lossen, maar ook hoe kwadratische vergelijkingen opgelost kunnen worden. Dat bewijst niet dat het maken van numerieke benaderingen in de tijd van Van Ceulen nog weinig werd gedaan of als erg moeilijk werd bestempeld. Waar Praalder zich op baseert, vermeldt hij niet.

Concluderend kan gezegd worden dat Praalder geen waardeoordeel geeft over Van Ceulen, zijn wiskunde en zijn tijdgenoten. Toch lijkt het of Praalder wel denkt dat het in zijn tijd gemakkelijker was de honderd opgaven op te lossen dan in de tijd van Van Ceulen. Des te opmerkelijk dat hij opgaven 7, 8 en 9 niet zo oploste als Van Ceulen bedoeld moet hebben en de laatste dertig opgaven geheel weglaat.

Discussie

Er zijn drie vragen gerezen bij het onderzoeken van de werken *Vanden Circkel* en *L. van Keulens voorstellen opgelost*. De eerste vraag stelde Praalder al,[8] maar is nog steeds onopgelost. Namelijk, wat was de numerieke methode van Van Ceulen? Hij kon van irrationale getallen (in de oude betekenis) decimale getallen maken (getuige hoofdstuk 7 uit *Vanden Circkel*). Dat was echter niet de manier van Van Ceulen om uit een hogeremachtsvergelijking een numeriek

[8] Zie passage op pagina 53

antwoord te krijgen (zie paragraaf 3.2.1).

De tweede vraag kwam naar aanleiding van het niet oplossen van de laatste dertig vragen door Praalder. Wat was de opvatting over rente in de tijd van Praalder? Grote kans dat Praalder niet dacht dat rente zich lineair gedraagt, maar hoe dan wel is een interessante vraag.

Nawoord

Vrouwen in de wiskunde... Ooit schreef ik daar een werkstukje over voor het vak „Geschiedenis van de wiskunde" aan de Universiteit Utrecht. Ik weet dat vrouwen veel hebben moeten doen om gehoord te worden en om te mogen leren en studeren wat ze maar willen. Maar als we kijken naar het aantal eerstejaars vrouwelijke wiskundestudenten aan de Universiteit Utrecht, denk ik dat we ons niet meer zo heel erg veel zorgen hoeven te maken.
Het lijkt me veel interessanter om na te denken over de emancipatie van wiskunde. Daarmee bedoel ik het beeld dat er is van wiskunde: het is moeilijk, saai en op de universiteit studeer je wiskunde, dus krijg je de vakken wiskunde, wiskunde en wiskunde. Het verbaasde me te lezen in *Oeffenschool der Mathematische Weetenschappen* dat het in die tijd nodig was om nieuw leven te blazen in de interesse in wiskunde bij niet-wiskundigen volgens Strabbe.[9] Ik dacht dat het iets van deze tijd was.

Ik heb het erg leuk gevonden me bezig te houden met de wiskundigen Van Ceulen en Praalder. Al denk ik niet dat de personen me gegrepen hebben, daarvoor weet ik te weinig over de personen, afgezien van hun bezigheden.

Gedurende mijn gehele studententijd tot nog toe, hebben veel mensen mij ingeschat als een studente geneeskunde, conservatorium, psychologie en andere alfa studies. Slechts één maal raadde iemand gelijk dat ik een bèta studente moest zijn, echter was zijn eerste keus informatica. Hopelijk zullen mensen mij altijd blijven beoordelen als een persoon die niet automatisch voldoet aan de omschrijving van een wiskundige. Onder andere met hoe ik over kom, zou ik graag willen bijdragen aan een beter beeld over wiskunde bij leerlingen in het voortgezet onderwijs.

Het lijkt me heerlijk om voor de klas te staan en dan vooral om alle lichtjes te zien branden en kwartjes te horen vallen. Met deze scriptie heb ik geleerd dat mijn manier van uitleggen nog niet optimaal is, maar wel steeds beter wordt. Gelukkig weet ik uit alle bijles ervaringen dat ik wel tot een leerling door kan dringen als de uitleg één op één is.

Tijdens het schrijven van deze scriptie heb ik veel verschillende emoties gevoeld. Er zijn momenten geweest dat ik absoluut geen vertrouwen meer had in een goede afloop. Gelukkig kon ik dan terecht bij mijn vriend of had ik een leuke dag met mijn goede vriendin of kon ik bellen met mijn moeder. Deze mensen

[9] [Strabbe, 1771a, voorreden]

hebben me ook geholpen bij het schrijven van deze scriptie. Sterker nog, deze scriptie had niet voor u gelegen als niet enkele mensen mij goed achter de broek aangezeten zouden hebben. Voor de hulp die ik heb gekregen wil ik enkele mensen bedanken.
Allereerst wil ik Steven Wepster bedanken voor de fijne volggesprekken en alle hulp die ik daar ontvangen heb. Steven, ook bedankt voor het begrip en de tips tijdens mijn verhuizing. Daarnaast ben ik heel blij dat Driek Rouwenhorst, Dominique van de Klugt en Pim van Dijk met aandacht hele vroege manuscriptjes hebben willen doorlezen. Frank van de Laan heeft een hoofdstuk geredigeerd, daarvoor zou ik hem via deze weg nogmaals willen bedanken. Het heeft mij bijzonder verrast en verheugd dat mijn ouders, Henk en Willemien Rouwenhorst, allebei een latere versie van mijn scriptie hebben doorgelezen. Zij hebben veel spelfouten kunnen opmerken.

Driek en Dominique hebben een paar wiskundige stukken doorgelezen, Driek studeert in Enschede werktuigbouwkunde en Dominique begon tegelijkertijd met mij in Utrecht met de studie wiskunde. Des te dankbaarder ben ik Pim, Frank, Henk en Willemien, die iets meer moeite moesten doen om zo veel mogelijk te begrijpen.

Hopelijk heeft u met plezier dit werk gelezen. Misschien heeft u kunnen lezen wat mij het meest verbaasde. Misschien ook niet. Met opzet staat het hoofdstuk Mengelwerk net voor de conclusie, daaruit heeft u misschien begrepen dat dit hoofdstuk op de valreep toegevoegd kon worden. Dat hoofdstuk heeft veel invloed gehad op wat er in de conclusie staat. Ik ben Steven Wepster dan ook erg dankbaar voor het vinden van de betreffende werken.

Bibliografie

[Beckers, 2003] Beckers, D., *"Het despotisme der Mathesis", opkomst van de propaedeutische functie van de wiskunde in Nederland, 1750-1850*, Uitgeverij Verloren, Hilversum, 2003

[Bewersdorff, 2006] Bewersdorff, J. *Galois Theory for Beginners*, AMS, Providence, Rhode Island, 2006

[Boer e.a., 2002] Boer, W e.a.*Moderne wiskunde, havo deel 3B*, Wolters Noordhoff, Groningen, 2002

[Booy, 1980] Booy, Dr.E.P. de *Kweekhoven der wijsheid, basis- en vervolgonderwijs in de steden van de provincie Utrecht van 1580 tot het begin der 19e eeuw*, De Walburg Pers, Zutphen, 1980

[Bos, 2000] Bos, H.J.M., Ludolph van Ceulen en de uitdaging van de wiskunde. In: *NAW* 5/1 nr. 3, september 2000, p 259-262

[Bos, 2001] Bos, H.J.M. *Redefining Geometrical Exactness*, Springer-Verlag, New York, 2001

[Brasser, 1663] Jacob R. Brasser, *Regula Cos, of Algebra, zynde de alderkonstrycksten regel om het onbekende bekent te maken; Noch is hier by gevoeght de Geometria van Nicolaus Petri Daventriensis, ende andere Questien van de Algebrae ; als mede eenige Exempelen van Gerrit Evertsz. Backer*, Amsterdam: G. van Goedesberg, 1663

[Calinger, 1982] Calinger, R., *Classics of mathematics*, Oak Park, Illinois, 1982

[Ceulen, 1596] Ceulen, L. van, *Vanden Circkel*, Jan Andriesz, Delft, 1596

[Ceulen, 1615] Ceulen, L. van, *De arithmetische en geometrische fondamenten van Mr. Ludolf Van Ceulen, met het ghebruyck van dien in veele verscheydene constighe questien, soo geometrice door linien, als Arithmetice door irrationale ghetallen, oock door den regel Coss, ende de tafelen sinuum ghesolveert*, Ioost van Colster en Iacob Marcus, Leiden, 1615

[Dijk, 2006] Dijk, S. van, *Belle de Zuylen/ Isabelle de Charrière : Education, Creation, Reception*, Rodopi, 2006

[Dold-Samplonius, 1968] Dold-Samplonius, Y. Die handschriften der Amsterdamer Mathematischen Gesellschaft. In: *Janus, revue internationale de l'histoire des sciences, de la médicine, de la pharmacie et de la technique* Tome LV, Année 1968, Leiden, E.J. Brill.

[Dumont, site] Dumont, A., *trefwoordenlijst Genealogie2008, Hompage Dumont, André*, http://home.planet.nl/~dumon002/woordenboek/r.html, 2008

[Gelder, 1980] Gelder, H.E. van, *De Nederlandse munten*, Het Spectrum B.V., Utrecht, 1980 (zevende bijgewerkte druk)

[Graaf, 1706] Graaf, A. de, *Inleyding tot de wiskunst, of, De beginselen van de geometria en algebra, Door Abraham de Graaf. De tweede Druk.*, Joannes Loors, Amsterdam, 1706

[Graafhuis, 1961] Graafhuis, A, De mathematici Laurens en Gerbrand Praalder, in *Jaarboekje van Oud-Utrecht*, 1961

[Grattan-Guinnes, 1997] Grattan-Guinness, I, *The Rainbow of Mathematics, a History of the Mathematical Sciences*, Norton, New York, 1997

[Hogendijk, 2010] Hogendijk, J.P., *The scolar and the fencing master: the exchanges between Joseph Justus Scaliger and Ludolph van Ceulen on the circkle quadrature (1594 – 1596)*, nog te verschijnen

[Hogendijk, site1] Hogendijk, J.P., *Literatuurlijst Ludoph van Ceulen* http://www.math.uu.nl/people/hogend/17ceulen.html

[Hogendijk, site2] Hogendijk, J.P., *The Bibliotheca Mathematica of Bierens de Haan*, http://www.math.uu.nl/people/hogend/bdh-bp.html

[INL GTB, site] Instituut voor Nederlandse Lexicologie, *INL GTB*, http://gtb.inl.nl/openlaszlo/my-apps/GTB/Productie/HuidigeVersie/src/inlgtb.html?owner=ONW, 19 mei 2009

[Katscher, 1979] Katscher, F. *Einige Entdeckungen über die Geschichte der Zahl Pi sowie Leben und Werk von Christoffer Dybvad und Ludolph van Ceulen*, Springer, Wenen, 1979

[Klein, 1968] Klein, J., *Greek mathematical Thought and the Origin of Algebra*, The M.I.T. Press, Massachusetts, 1968

[Maanen, van, 1987] Maanen, J.A. van, *Facets of seventeenth century mathematics in the Netherlands*, Drukkerij Elinkwijk BV, Utrecht, 1987

[Michel, 2008] Michel, B. ed. *Verslagen van het seminarium over ruzies in de wiskunde*, Universiteit Utrecht, Utrecht, 2008

[Mijnhardt, 1984] Mijnhardt, W.M., Het nut en de genootschapsbeweging. In: *Om het Algemeen Volksgeluk, Twee Eeuwen Particulier Initiatief 1784-1984*, Salland, Deventer, 1984

[Moll, 1839] Moll, G. Iets over Jacob Maurits Carel Baron van Utenhove van Heemstede. In: *Algemeene Konst- en lettterbode, voor het jaar 1839 II. Deel*, 9 augustus 1839, Te Haarlem, bij de Wed. A. Loosjes Pz.

[Oomes, 2000] Oomes, R.M.Th.E. e.a.*Pi in de bibliotheek* Universiteitsbibliotheek Leiden, Leiden, 2000

[Praalder, 1752] *Verhael van 't gepasseerde beneffens d'examen die gehouden is, ter gelegentheit der beroepinge van Adriaan Visser, tot stats schoolmeester en voorzanger te Purmerende*, Van Gilst, Rotterdam, 1752

[Praalder, 1753] Praalder, L., *Gronden der Wiskonst, behelsende een klaere fondamentele instructie van de Mathesis eerste stuk ontworpen, bereкent, en in 't licht gebracht door Laurens Praelder, Examinateur van d'Zee Officieren, by het Ed. Mog. Collegie ter Admiraliteit op de Maze; en Leermeester der Wiskonst, te Rotterdam.*, van Gilst, Rotterdam, 1753

[Praalder, 1777] Praalder, L, *Verzameling van eenige opgeloste zo bepaalde als onbepaalde mathematische voorstellen*, Morterre, Amsterdam, 1777

[Praalder, 1790] Praalder, L, *Ludolf van Keulen's mathematische voorstellen, bekend onder den tytel van kunstige vragen zonder ontbindingen, opgelost en verrykt met aanmerkingen en uitbreidingen, door Laurens Praalder, leraar in de wiskunde te Utrecht. Met Plaaten*, J. W. Smit, Amsterdam, 1790

[Pycior, 1997] Pycior, H.M., *Symbols, Impossible Numbers, and Geometric Entanglements*, Cambridge university Press, Cambridge, 1997

[Reich, 2002] Reich, K, The 'Coss' tradition in algebra, in: *Companion Encyclopedia of the History and Philosophy of the Mathematical Sciences*, Routledge, London 1994

[Rowlett, site] Rowlett, R, *Units: R*, http://www.unc.edu/r̃owlett/units/dictR.html, 2002

[Singels, 1923] Singels, Dr.N.J., *Gedenkboek van het Provinciaal Utrechtsch Genootschap voor Kunsten en Wetenschappen*, G. Kreysing, Leipzig, 1923

[Strabbe, 1770a] Strabbe, A.B., *Oeffenschool der Mathematische Weetenschappen. Eerste deel, Eerste Stuk. Bevattende eene welgeschikte mathematische Handleiding, Waar in de ARITHMETICA en ALGEBRA, volgens eene nieuwe Leerwyze, klaar en bevatbaar voorgesteld worden. In deeze orde geschikt Ten dienste der geenen, welken zich in de gemeene, en verhevene deelen der Wiskunde zouden willen oeffenen. Met Plaaten*, Amsterdam, J. Morterre, 1770

[Strabbe, 1770b] Strabbe, A.B., *Oeffenschool der Mathematische Weetenschappen. Eerste deel, Tweede Stuk. Bevattende een Mengel-werk eener keurige versaameling van Mathematische Voorstellen, welke door beminaars der Wiskunde aan malkanderen, in de Nederduitsche Taale, zyn opgegeeven; benevens eenige weinige, door Geleerden in Engeland elkander tot Oeffening voorgesteld; en waar van de Ontbindingen, in een welgeschikte orde, zyn medegedeeld. Ten dienste der geenen, welken zich in de gemeene, en verhevene deelen der Wiskunde zouden willen oeffenen.*, Amsterdam, J. Morterre, 1770

[Strabbe, 1770c] *Gronden der meetkunst. Behelzende een beknopt saamenstel de eerste beginselen van deeze Weetenschap; Benevens derzelver Toepassing In de Oplossing van eenige Meetkunstige Voorstellen; De Meeting der Vlakken en Lighaamen; en de Maxima en Minima Van Meetkundige Groothedenl Ter dienste der geene, welke zich in de eenvouwdigste Grondbeginselen deezer Weetenschap willen oeffenen.*, Amsterdam, J. Morterre, 1770

[Strabbe, 1771a] Strabbe, A.B., *Oeffenschool der mathematische weetenschappen. Tweede deel, Eerste Stuk. Bevattende eene welgeschikte mathematische Handleiding, Waar in de toepassing der ALGEBRA op de MEETKUNDE, benevens de eerste beginselen der FLUXIE-REKENING, volgens de niuewste Leerwyze, klaar en bevatbaar voorgesteld worden. In deeze orde geschikt Ten dienste der geenen, welken zich in de gemeene, en verhevene deelen der Wiskunde zouden willen oeffenen. Door ARNOLDUS BASTIAAN STRABBE, Mathematicus te Amsterdam; Lid van het Hamburger Genootschap der Mathematische Weetenschappen.*, Amsterdam, J. Morterre, 1771

[Strabbe, 1771b] Strabbe, A.B., *Oeffenschool der Mathematische Weetenschappen. Tweede Stuk. Bevattende een mengel-werk eener keurige verzaameling van mathematische voorstellen, Welke door Biminnaars der Wiskunde aan malkanderen, in de Nederduitsche taale, zyn opgegeeven; benevens eenige weinige, door Geleerden in Engeland elkanderen tot oeffeninge voorgesteld; en waar van de Ontbindingen, in een welgeschikte orde, zyn medegedeeld. Ten dienste der geenen, welken zich in de gemeene en verhevene deelen der Wiskunde zouden willen oeffenen, in 't licht gegeeven door Arnoldus Bastiaan Strabbe, Mathematicus te Amsterdam; Lid van het Hamburger Genootschap der Mathematische Weetenschappen*, Amsterdam, J. Morterre, 1771

[Struik, 1958] Prof. Dr. Struik, D.J., *Het land van Stevin en Huygens*, Pegasus, Amsterdam, 1958

[Thoro, 1963] Thoro, D., Regula Falci and the Fibonacci numbers, *The American Mathematical Monthly*, Vol. 70, No. 8, 1963, p. 869

[Twilt, 1669] Twilt, A. *Toet-steen van d'Algebra Spetiosa*, G. Goedesbergh en Willem van Beaumont, Amsterdam, 1669

[Vlek, 2008] Vlek, C. *Ludolf van Ceulens Arithmetische en Geometrische Fondamenten*, scriptie, Universiteit Utrecht, Utrecht, 2008

Bijlage A

Splitsing van de 100 vragen

In het onderstaande overzicht staat uitgesplitst hoe de opgaven verdeeld kunnen worden over de verschillende vakgebieden. Tien van de opgaven zijn meetkundig, 15 numeriek en de rest met algebra.

	Nummer van de opgaven	Aantal
meetkundig		
"pure"meetkunde	1-4	4
transformaties	7-12	6
numeriek	5, 6, 76-81, 84, 87-99	22
cossisch		
machten van rationale getallen	24-31, 52, 56-59, 61, 63-67, 69, 70	21
vergelijkingen van graad 3	13-16, 18, 22, 82	7
vergelijkingen van graad ≤ 2	17, 19-21, 33-36, 48, 100	10
rijen		
rekenkundige rijen	50, 60, 62	3
meetkundige rijen	37-45, 47, 49, 51 (94, 100)	12
driehoeksgetallen	53-55	3
anders	32, 46, 68, 71-76, 83, 85, 86	12
totaal:		100

Praalder loste de laatste dertig opgaven niet op. Hij deed dat volgens eigen zeggen omdat de opgaven niets meer toe zouden voegen aan zijn werk. Toch zijn het heel interessante opgaven, omdat een deel van de laatste dertig opgaven gaan over renterekening, maar alle opgaven handelen om koopmansproblemen. Van Ceulen hanteerde een andere definitie van rente. Desondanks kunnen veertien opgaven precies zo opgelost worden als Van Ceulen deed, zestien opgaven anders. Hoe de laatste dertig opgaven gecatagoriseerd moeten worden staat beschreven in onderstaande tabel. Dikgedrukte getallen geven opgaven weer die wij anders op zouden lossen dan Van Ceulen dat zou doen.

	Nummer van de opgaven	Aantal
Renterekening	71-75, 84, 93	7
	76-82, **89-92**, **95-99**	15
Koopmansraadsels	75, 83, 85-88	6
Rekenkundige rij	94, 100	2

Bijlage B

Koptekst wisselingen

	1771
p. 3-207	Byvoegsel tot het Mengel-Werk
p. 208-209	Byvoegsel tot het van LUDOLF van KEULEN
p. 210- 255	Oplossingen der konstige Vraagen van LUDOLF van KEULEN
p. 256-257	Oplossingen der konstige Vraagen Mengel-Werk
p. 258-264	Byvoegsel tot het Mengel-Werk

	1777
p. 3-207	Oplossingen der konstige Vraagen van LUDOLF van KEULEN
p. 208-209	Oplossingen der konstige Vraagen Mengel-Werk
p. 210-265	Byvoegsel tot het Mengel-Werk