In deze eerste *Pythagoras* van 2010 vertelt historicus van de wiskunde Steven Wepster over Ludolph van Ceulen, die dit jaar precies 400 jaar geleden overleed. Als rekenmeester stak Van Ceulen ver boven de concurrentie uit, maar ook bij academici dwong hij respect af. Hij loste lastige meetkundige problemen op en kon rekenen als de beste. Van Ceulen is beroemd geworden om zijn benadering van π, waarover je kunt lezen in het artikel 'Hoe Van Ceulen π insloot' op pagina 26.

■ door Steven Wepster

LUDOLPH VAN CEULEN (1540-1610): MEESTER DER REKENMEESTERS

Ludolph van Ceulen werd geboren op 28 januari 1540 in het Duitse plaatsje Hildesheim, in de buurt van Hannover. Zijn vader was koopman. Toen Ludolph nog jong was, overleden allebei zijn ouders. Waarschijnlijk is hij daarna met zijn twee broers naar Antwerpen getrokken. Van daar verhuisde hij omstreeks 1562 naar Delft, waar hij rekenmeester en schermleraar werd.

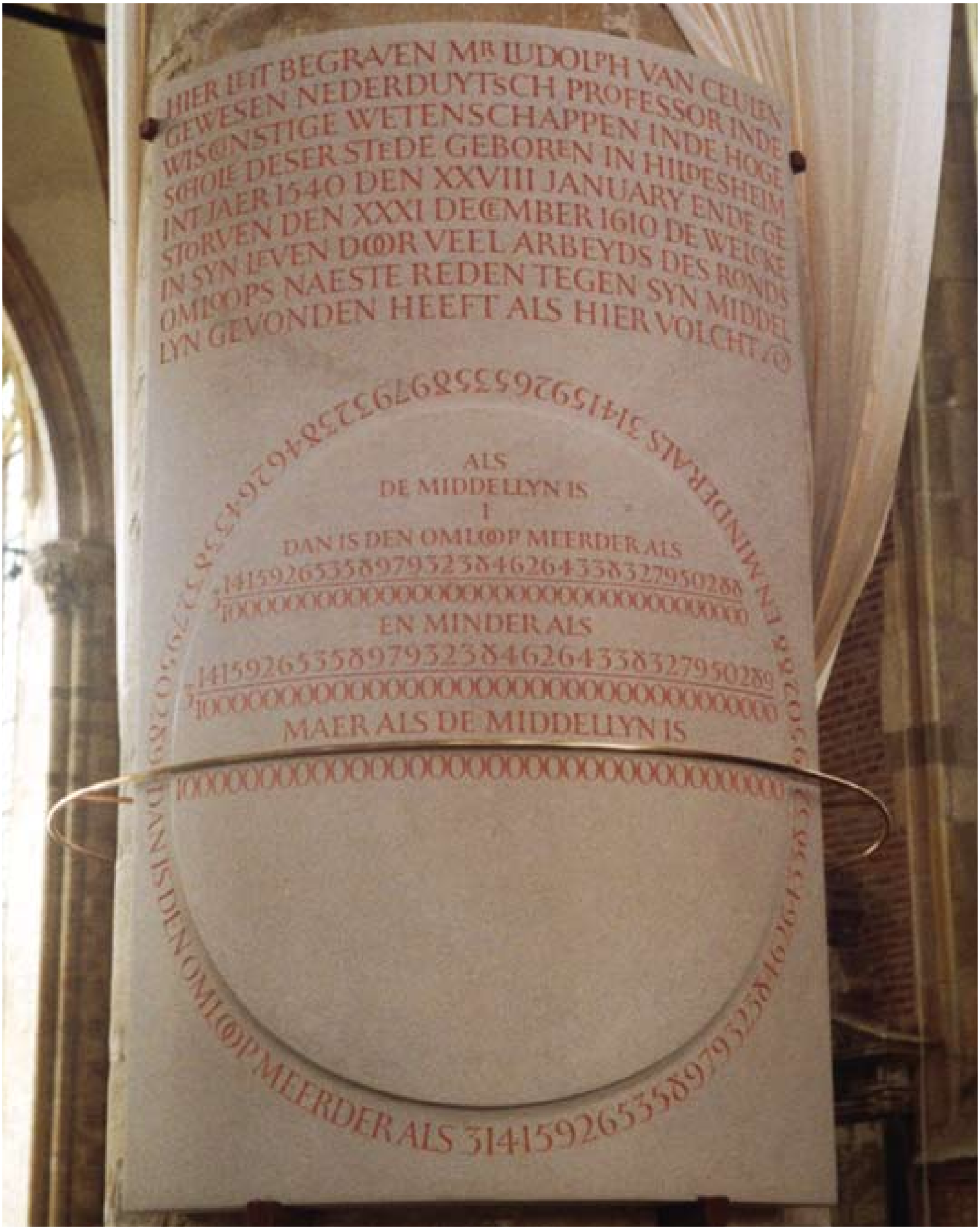
In die tijd bestond er nog geen Ministerie van Onderwijs en er was ook nog geen leerplicht. Om het vak van bijvoorbeeld timmerman te leren, ging je in de leer bij een timmerman, maar als je vader vond dat je later zijn handelsbedrijf moest overnemen, dan moest je eerst leren rekenen en boekhouden. Dat kon bij een rekenmeester. Als je vader bovendien rijk was, dan vond hij het ook belangrijk dat je leerde dansen, paardrijden en schermen en dat je wat van muziek wist. Met een school voor rekenen en schermen moet Van Ceulen dus wel een rijke potentiële klantenkring hebben aangeboord.

Niet alle rekenmeesters waren even goed, en het was zaak dat je het vak leerde bij een van de betere. De concurrentie tussen rekenmeesters was dan ook groot: elk probeerde te laten zien dat hij beter was dan de concurrentie. Een manier daartoe was om een opgave op een openbare plaats (bijvoorbeeld aan de kerkdeur) op te hangen en een prijs uit te loven voor een ieder die een goede oplossing vond. Gebruikelijk bij dat soort 'wedstrijden' was dat je tegelijk met het indienen van je eigen oplossing, ook een tegenvraag aan de uitdager opgaf.

Een van die uitdagers was de Haarlemse rekenmeester Willem Goudaen. In zijn geval pakte de reclame-actie echter negatief uit. Er waren minstens twee personen, de bekende rekenmeester Nicolaas

Figuur 1 De titelillustratie van Van Ceulens boek *Vanden Circkel*

Petri en onze Ludolph, die Goudaens opgave met gemak oplosten. Maar Goudaen wilde niet van hun oplossing weten en weigerde de prijs (een beker wijn) uit te keren. Het is niet helemaal duidelijk of hij zelf zijn opgave wel begreep. Echt komisch werd het toen uitkwam dat de tweede opgave die Goudaen openbaar ophing, in feite Petri's tegenvraag bij diens oplossing van de eerste opgave was: regelrecht



Figuur 2 De π-steen in de Pieterskerk

plagiaat! Zowel Petri als Van Ceulen hebben hun ergernissen over deze episode in een klein boekje uitgegeven. Het is niet bekend of Goudaen verder nog veel klandizie heeft gehad.

TOT DOLEN GEBOREN Korte tijd later trok Ludolph nogmaals ten strijde tegen een wiskundige kwakzalver. Deze keer was het Simon van der Eycke, een uitgeweken Fransman die beweerde dat hij een exacte breuk had voor de verhouding tussen de omtrek en de diameter van een cirkel. Volgens hem was π (zo noemen we die verhouding pas sinds de achttiende eeuw) gelijk aan $(\frac{39}{22})^2$.

Van Ceulen toonde aan dat Van der Eycke het mis had. De laatste reageerde met een nieuwe waarde die volgens hem wel echt klopte, namelijk $\pi = \sqrt{\sqrt{320}-8}$. Dat was ook niet zo snugger, want als Van der Eycke de literatuur een beetje bijhield, dan had hij kunnen weten dat deze waarde al eerder naar het rijk der fabelen was verwezen. Ludolph wees hem een tweede maal terecht en voegde er met niet ongebruikelijke spot aan toe dat (de uit het Franse plaatsje Dôle afkomstige) Simon 'tot dolen geboren' was.

Inmiddels had Van Ceulen goede contacten opgebouwd met de Delftse regentenklasse. Zijn schermschool was gevestigd in de kapel van het Prinsenhof en waarschijnlijk heeft hij zelfs Prins Maurits schermles gegeven. Maurits had een goede vriend en vertrouweling Simon Stevin, die tegelijk een van de belangrijkste wiskunstenaars in Nederland was. Stevin heeft ervoor gezorgd dat het Nederlands veel eigen woorden voor wiskundige begrippen heeft, waarvoor andere talen meestal (verbasterde) Latijnse of Griekse woorden gebruiken, zoals 'loodrecht' in plaats van 'perpendiculair', en 'wiskonst' in plaats van 'Mathematik'.

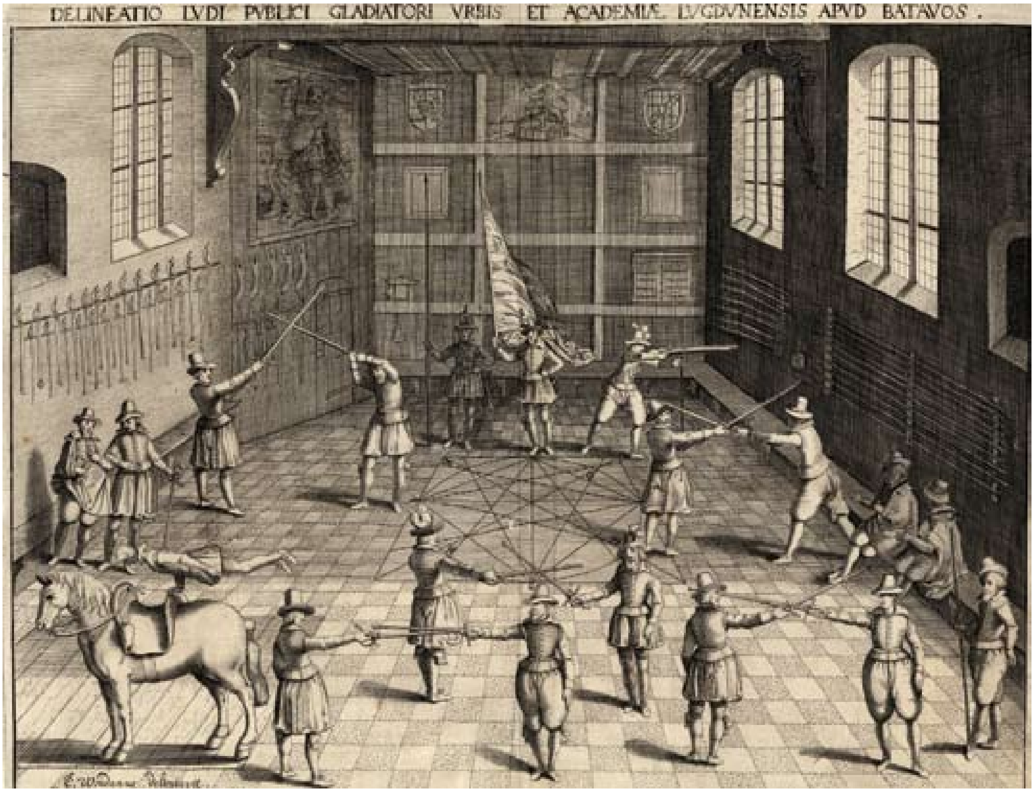
Ook bevorderde Stevin het gebruik van de decimale schrijfwijze van gebroken getallen. Stevin werkte samen met Jan Cornets de Groot aan het verbeteren van windmolens om polders droog te malen. Jan de Groot was een van de bestuurders van de stad Delft en vader van onze beroemde geleerde Hugo de Groot. Hij kende Van Ceulen ook goed en omdat Van Ceulen geen klassieke talen kon lezen, vertaalde De Groot voor hem zelfs een stukje van Archimedes over π in het Nederlands.

VANDEN CIRKEL In 1596 verscheen het boek *Vanden Circkel*, zie figuur 1, waarmee Van Ceulen het bekendst is geworden. Hierin berekende hij de lengte van de zijde van in cirkels ingeschreven regelmatige n-hoeken met $3 \leq n \leq 80$. Sommige van die zijden waren al eerder berekend, maar nog niet eerder in 20 cijfers achter de komma. Veel bijzonderder is dat hij ook de zijden uitrekende van de veelhoeken met $n = 7, 11, 13, 17$ etcetera die je niet met alleen maar meetkunde kunt vinden. Van Ceulen kon de lengte van de zijde van een $2n$-hoek uitdrukken in een algebraïsche vergelijking van ongeveer graad n, waar hij dan schijnbaar moeiteloos een numerieke oplossing van vond. Van Ceulen legde precies uit hoe hij aan de vergelijkingen kwam, maar we weten niet hoe hij ze oploste. Algebra was nog een relatief jong vakgebied en er waren op dat moment maar twee mensen die net zo virtuoos waren in het combineren van meetkunde en algebra: de Vlaamse professor Adriaan van Roomen die contact had met Van Ceulen, en de beroemde Franse hofgeleerde François Viète die ook in contact stond met Van Roomen.

De reden dat Van Ceulen met dit boek beroemd werd is echter anders: het boek bevat namelijk π in 20 decimalen. Later heeft Van Ceulen er zelfs 35 gevonden en daar was hij zo trots op dat hij die graag na zijn overlijden op zijn grafsteen wilde. Die wens is in vervulling gegaan; in de Pieterskerk in Leiden kun je tegenwoordig een replica van de originele grafsteen bewonderen, zie figuur 2. Vooral in Duitsland heette π nog lang het *Ludolphse getal*. Verder bevat *Vanden Circkel* nog goniometrische tabellen met uitleg over het gebruik ervan, een heleboel opgaven en problemen waar de liefhebbers hun tanden in konden zetten en een omvangrijk aanhangsel over renteberekeningen. Dat laatste onderwerp was natuurlijk van belang voor het handelsrekenen.

Nog een ander hoofdstuk in het boek moet hier genoemd worden. Daarin geeft Van Ceulen zijn kritiek op de Leidse hoogleraar Josephus Justus Scaliger die onlangs een valse waarde voor π had gepubliceerd. Deze erudiete geleerde wist verschrikkelijk veel van oude geschriften uit het Midden Oosten, maar van wiskonst had hij duidelijk minder verstand. De kwestie lag uiterst gevoelig omdat de hoogleraar blijk had gegeven geen kritiek van een 'vechtbaas', die niet eens Latijn kon, te aanvaarden. Van Ceulen koos er daarom voor om de fouten in Scaligers werk aan de dag te leggen zonder de geleerde bij naam te noemen.

VAN SCHOOTEN EN SNELLIUS Inmiddels woonde Van Ceulen zelf ook in Leiden. Hij kon schermles geven in de voormalige Faliebagijnkerk, zie figuur 3, die tevens bij de Leidse universiteit in gebruik was als bibliotheek en anatomisch theater. Vanaf 1600 bood het gebouw ook onderdak aan de Duytsche Mathematique. Dat was een school voor landmeters en ingenieurs, die prins Maurits in dat jaar had opgericht omdat hij zulke vakmensen nodig had in zijn strijd tegen de Spaanse overheersing van de Nederlanden. Maurits had Stevin het les-



Figuur 3 De schermschool in de Faliebagijnkerk

programma laten opstellen. Hij benoemde Ludolph van Ceulen en Symon van Merwen als docenten. Ze gaven les in het Nederlands, terwijl aan de universiteit college werd gegeven in het Latijn.

Tot aan zijn dood op oudejaarsdag 1610 bleef Ludolph lesgeven aan de Duytsche Mathematique. Een van zijn leerlingen was Frans van Schooten, die later zelf docent aan die school is geworden. Een andere student die veel van Van Ceulen heeft opgestoken was Willebrord Snellius, die later professor aan de universiteit werd. Snellius had dan ook een klassieke scholing en zat niet op de Duytsche Mathematique. De meester en de student hebben ook samen aan bepaalde problemen gewerkt. Sporen hiervan zijn terug te vinden in twee postume boeken van Van Ceulen: *De arithmetische en geometrische fondamenten* samen met de Latijnse vertaling ervan *Fundamenta arithmetica et gemetrica*.

Het was Snellius die de vertaling verzorgde; daarbij liet hij niet na om op diverse plekken zijn eigen opvattingen als commentaar toe te voegen. Op die manier kunnen we een mooi inzicht krijgen in de kwesties en keuzes waar de wiskunde in die tijd voor stond. Het was bijvoorbeeld nog helemaal niet algemeen geaccepteerd dat je algebra en meetkunde met elkaar kon verbinden. Van Ceulens werk en Snellius' commentaar daarop laten twee verschillende invalshoeken op zulke problemen zien: de ene vanuit de praktisch georiënteerde rekenmeestertraditie, de andere vanuit het perspectief van de klassiek geschoolde, humanistische, geleerde. Dat Snellius de tijd nam om het werk van zijn vroegere leermeester in het Latijn te vertalen, geeft aan dat hij hem ver boven de gewone rekenmeesters uit vond steken.

400STE STERFDAG Ter herdenking van Ludolphs 400ste sterfdag vinden er in 2010 een aantal activiteiten plaats.
Meer hierover lees je op www.ludolphvanceulen.nl. Daar staat ook een transcriptie van *Vanden Circkel* en links naar ander materiaal.
Voor wie meer wil lezen over Van Ceulen: het best gedocumenteerde artikel over hem is 'Einige Entdeckungen über die Geschichte der Zahl Pi sowie Leben und Werk von Christoffer Dybvad und Ludolph van Ceulen' van Friedrich Katscher. Het verscheen in *Denkschriften der mathematisch-naturwissenschaftlichen Klasse*, band 116 pp. 85-129, Wenen 1979. ■

Ludolph van Ceulen had met enorm veel rekenwerk onder- en bovengrenzen voor π bepaald die pas in het 35ste cijfer achter de komma verschilden. Dit feit werd op zijn grafsteen in de Leidse Pieterskerk vermeld. In zijn boek *Vanden Cirkel* ging hij iets minder ver: daarin beschrijft hij hoe hij twintig decimalen vindt. Die methode leggen we uit in dit artikel.

■ door Steven Wepster

HOE VAN CEULEN π INSLOOT

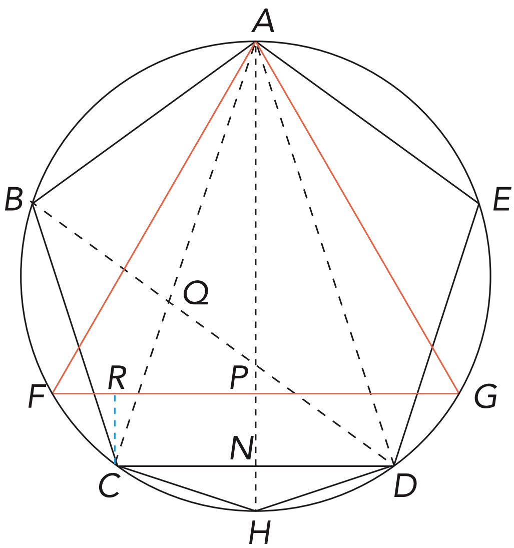
Van het getal π, de verhouding tussen omtrek en diameter van een cirkel, zijn tegenwoordig meer dan 10^{12} decimalen bekend. In de tijd van Ludolph van Ceulen (1540-1610) was dat wel anders: het was toen een hele prestatie om enkele tientallen decimalen uit te rekenen.

Van Ceulen gebruikte een klassieke methode die ook de Griekse geleerde Archimedes (ca. 250 v. Chr.) had gebruikt. Het idee is dat je de cirkelomtrek insluit tussen twee regelmatige veelhoeken: een ingeschreven in de cirkel en de andere omgeschreven. Je ziet direct in dat de cirkelomtrek langer is dan de som van de zijden van de ingeschreven veelhoek, en tegelijk korter dan de som van de zijden van de omgeschreven veelhoek. Hoe meer hoeken je neemt, hoe kleiner het verschil tussen de in- en omgeschreven veelhoek en zo krijg je dus een goede π-benadering.

Archimedes gebruikte 963 hoeken en sloot π in tussen, afgerond, $3\frac{10}{71}$ en $3\frac{1}{7}$. In de tijd van Archimedes rekende nog niemand met de Hindu-Arabische cijfers die we nu gebruiken, laat staan met decimalen achter de komma, dus zo'n benadering met breuken was wel praktisch.

Om π nauwkeuriger uit te rekenen, heb je meer hoeken nodig. Hoe kom je daaraan? De eenvoudigste manier is door steeds te verdubbelen. Dat is ook wat Archimedes deed: $96 = 6 \times 2^4$. Van een ingeschreven regelmatige zeshoek weet je dat de omtrek even lang is als 3 keer de diameter van de cirkel. De omgeschreven zeshoek heeft zijden die $2/\sqrt{3}$ keer zo lang zijn, dus de totale omtrek is $6/\sqrt{3} \approx 3{,}46$ keer die diameter. Dat is nog niet zo'n beste benadering. Maar als je steeds het aantal zijden verdubbelt, krijg je een twaalfhoek, een 24-hoek, een 48-hoek en ten slotte een 96-hoek. Van Ceulen deed het iets anders. Voor de 20 decimalen die in *Vanden Circkel* staan, begon hij met een 15-hoek en hij verdubbelde 31 keer, waardoor hij een 32.212.254.720-hoek kreeg.

We gaan nu eerst kijken hoe je een zijde van de 15-hoek berekent en daarna hoe je de zijde berekent van een $2n$-hoek als je die van een n-hoek weet. We nemen vanaf nu steeds een cirkel met straal 1.



Figuur 1 Driehoek en vijfhoek leiden tot de vijftienhoek

DE VIJFTIENHOEK Het valt nog helemaal niet mee om de zijde van een regelmatige vijftienhoek te vinden. Natuurlijk kun je je rekenmachine $2\sin(\frac{\pi}{15})$ uit laten rekenen, dat geeft *ongeveer* de juiste lengte, maar we moeten nog 31 keer verdubbelen en daarom kunnen we beter zo lang mogelijk precies te werk gaan. We gaan dus die zijde exact berekenen. In figuur 1 zie je een cirkel met middellijn AH, en twee ingeschreven figuren: een regelmatige vijfhoek $ABCDE$ en een regelmatige driehoek AFG. De boog ABC beslaat 2/5 van de cirkelomtrek en de boog ABF is 1/3 van de omtrek. Dus boog FC is 2/5 – 1/3 = 1/15 van de omtrek; het lijnstuk FC is dus een zijde van een vijftienhoek en we moeten zijn lengte berekenen.

Eerst berekenen we de zijde AF, met behulp van driehoek AFH die rechthoekig is (zie je waarom?). Met $AH = 2$ (de diameter van de cirkel) en $FH = 1$ (een zijde van een regelmatige zeshoek) en de stelling van Pythagoras vind je snel $AF = \sqrt{3}$.

Nu de vijfhoek, die is een stuk lastiger. Noem de lengte van de zijden x, de lengte van de diagonalen s, en noem $CH = HD = t$ (dit zijn zijden van een regelmatige tienhoek). Kijk nu naar de driehoeken ABQ en ACD en ga na dat ze gelijkvormig en gelijkbenig zijn. Daardoor volgt dat $AB : BQ = AC : CD$ en dus, als je de zijden invult en kruiselings vermenigvuldigt, $x^2 = s(s - x)$. Als je deze kwadratische vergelijking oplost voor s, dan vind je

$$s = x \cdot \tfrac{1}{2}(1+\sqrt{5}) \qquad (1)$$

Er is ook een negatieve wortel, maar die doet er niet toe. Nu kijken we naar driehoek ACH, die is rechthoekig in C (Thales). De oppervlakte van deze driehoek kun je op twee manieren uitrekenen, afhankelijk van wat je als basis en hoogte kiest: ofwel AC en CH, ofwel AH en CN (met N het midden van CD). In het eerste geval is de oppervlakte $\frac{1}{2}st$, in het tweede geval $\frac{1}{2}x$. Gelijkstellen geeft je de vergelijking

$$x = st. \qquad (2)$$

Verder geldt volgens Pythagoras in driehoek ACH

$$s^2 + t^2 = 4,$$

wat met (2) te herleiden is tot

$$\frac{x^2}{t^2} + t^2 = 4$$

ofwel

$$x^2 = 4t^2 - t^4. \qquad (3)$$

Uit (1) en (2) volgt dat $t \cdot \frac{1}{2}(1+\sqrt{5}) = 1$, dus $t = \frac{1}{2}(\sqrt{5}-1)$. Om x te bepalen, vullen we dit in in (3):

$$x^2 = 4(\tfrac{1}{2}(\sqrt{5}-1))^2 - (\tfrac{1}{2}(\sqrt{5}-1))^4.$$

Met wat rekenwerk volgt

$$x^2 = \tfrac{1}{2}(5-\sqrt{5})$$

en dus is de lengte van de zijde gelijk aan

$$x = \sqrt{\tfrac{1}{2}(5-\sqrt{5})}.$$

Om nu de zijde van de 15-hoek FC uit te rekenen, laten we uit C een loodlijn CR op FG neer, zodat driehoek FCR rechthoekig is in R. We hebben dan

$$\begin{aligned} FR &= \tfrac{1}{2}(FG - CD) \\ &= \tfrac{1}{2}\left(\sqrt{3} - \sqrt{\frac{5-\sqrt{5}}{2}}\right) \\ &= \sqrt{\tfrac{3}{4}} - \sqrt{\tfrac{5}{8} - \sqrt{\tfrac{5}{64}}}. \end{aligned}$$

Het kwadraat hiervan is

$$FR^2 = 1\tfrac{3}{8} - \sqrt{\tfrac{5}{64}} - \sqrt{1\tfrac{7}{8} - \sqrt{\tfrac{45}{64}}}.$$

Ook hebben we $RC = HP - HN$.
Hierin is $HP = \frac{1}{2}$, want de hoogte van driehoek AFG is $\frac{3}{2}$. Uit de gelijkvormigheid van de driehoeken HCN en HAC volgt verder $HN = HC^2/HA = t^2/2 = \frac{3}{4} - \sqrt{\frac{5}{16}}$. Dus $RC = \sqrt{\frac{5}{16}} - \frac{1}{4}$. Het kwadraat is

$$RC^2 = \tfrac{3}{8} - \sqrt{\tfrac{5}{64}}.$$

Nu kunnen we dus $FC^2 = FR^2 + RC^2$ uitrekenen en de wortel uit het resultaat trekken. Zo vinden we voor de lengte van een zijde van de 15-hoek

$$\sqrt{1\tfrac{3}{4} - \sqrt{\tfrac{5}{16}} - \sqrt{1\tfrac{7}{8} - \sqrt{\tfrac{45}{64}}}}.$$

VERDUBBELING Nu gaan we de zijde van een $2n$-hoek berekenen aan de hand van de zijde van een n-hoek. We volgen niet Ludolph, want die had voor zijn resultaat een (zelfs voor die tijd) onnodig ingewikkeld bewijs gegeven. We zullen zijn resultaat afleiden op een manier die veel beter bij de tegenwoordige vwo-kennis past, namelijk uitgaande van de goniometrische formule $\cos 2\varphi = 1 - 2\sin^2\varphi$. Die kun je ook schrijven als $2\sin^2\varphi = 1 - \cos 2\varphi$. Als je nu gebruikt dat $\cos 2\varphi = \sqrt{1 - \sin^2 2\varphi}$ en alles met 2 vermenigvuldigt, krijg je $(2\sin\varphi)^2 = 2 - \sqrt{4 - (2\sin 2\varphi)^2}$.
Deze kennis passen we nu toe in figuur 2, waarin je een deel van de cirkelboog ziet met middelpunt M, en twee koorden CD en KL. Beide koorden snijden de straal MH loodrecht. Verder is $\angle DMH = \varphi$ en $\angle LMH = \varphi$. Koorde CD staat dus over een twee keer zo grote boog als koorde KL. Als CD de zijde van een n-hoek is, dan is KL de zijde van een $2n$-hoek. Er geldt dat $CD = 2\sin 2\varphi$ en $KL = 2\sin\varphi$. Volgens de zojuist afgeleide verdubbelingsformule geldt dus $KL^2 = 2 - \sqrt{4 - CD^2}$. Laten we zeggen dat de zijde van de n-hoek x is, dan is de zijde van de $2n$-hoek $\sqrt{2 - \sqrt{4 - x^2}}$,

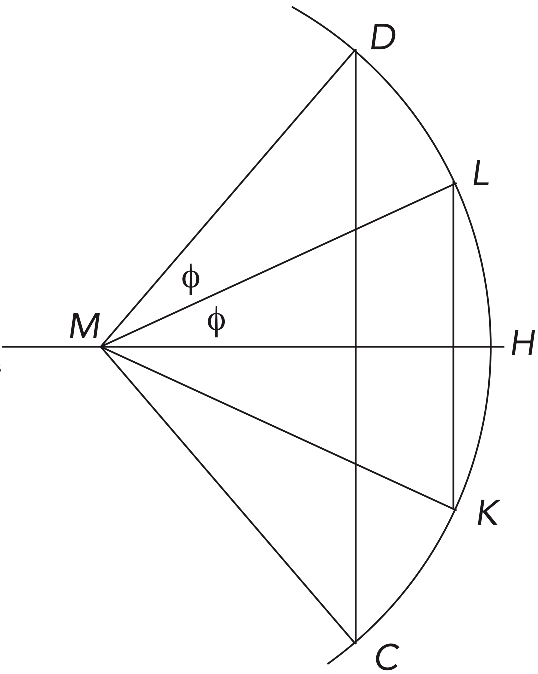
van de $4n$-hoek $\sqrt{2 - \sqrt{2 + \sqrt{4 - x^2}}}$,

van de $8n$-hoek $\sqrt{2 - \sqrt{2 + \sqrt{2 + \sqrt{4 - x^2}}}}$,
etcetera. Je kunt nu makkelijk zelf de formule voor de 15×2^{31}-hoek opschrijven.

TERUG NAAR π We weten nu hoe je de zijde van een ingeschreven regelmatige 15×2^n-hoek uitrekent en als je die met $15 \times 2^{n-1}$ vermenigvuldigt, heb je de halve omtrek die (bij een cirkel met straal 1) iets kleiner is dan π. Vanaf de bovenkant kun je π benaderen met een omgeschreven 15×2^n-hoek.

Om te begrijpen hoe je het makkelijkst aan de maten van de omgeschreven veelhoeken komt, keren we terug naar figuur 1. Daarin is HD een zijde van de ingeschreven tienhoek; wat er nu komt geldt echter voor elke $2n$-hoek. Omdat er een even aantal hoeken is, is A een hoekpunt recht tegenover H. De koorde AD staat loodrecht op HD en ook loodrecht op de tegenoverliggende zijde bij A. Een cirkel met diameter AD zou precies in de tienhoek passen. Andersom kun je de hele tienhoek met een factor $1/AD$ vergroten zodat hij precies om de cirkel met straal 1 past. Maar er geldt $AD = \sqrt{4 - HD^2}$, dus de vergrotingsfactor volgt gewoon uit de laatst berekende zijde van de ingeschreven figuur. De zijde van de omgeschreven figuur vind je dus met slechts één wortel extra.

Voordat er rekenmachines bestonden, rekende iedereen met potlood en papier. Tegenwoordig zijn er niet zo veel mensen die nog met de hand kunnen worteltrekken. Meester Ludolph had daar helemaal geen problemen mee. Voor het kwadraat van de zijde van een 15-hoek hoefde hij maar 3 wortels te trekken en totaal met alle verdubbelingen had hij 36 wortels nodig voor de in- en omgeschreven 15×2^{31}-hoeken. Om aan het eind nog 20 significante cijfers over te houden, moest hij beginnen met iets meer dan 40 cijfers achter de komma. Hier moet hij toch wel een paar weken mee bezig zijn geweest. ■



Figuur 2 Van de n-hoek naar de $2n$-hoek