Praktisch handboek of wetenschappelijke verhandeling?

Over landmeetkunde in Van Ceulens *Vanden Circkel*

Bachelorscriptie Wiskunde onder begeleiding van dr. S.A. Wepster

Marianne Hoksbergen

2 juni 2010

Inhoudsopgave

1 Inleiding **2**

2 Van Ceulen in context **4**
2.1 Op weg naar de Gouden Eeuw . . . 4
2.2 Ludolph van Ceulen . . . 5
2.3 Landmeetkunde in de zestiende eeuw . . . 6

3 Nuttige tabellen voor landmeters (en vele anderen) **8**
3.1 Korte geschiedenis van de Europese trigonometrie tot aan de zeventiende eeuw . . . 8
3.2 De tabellen in *Vanden Circkel* . . . 11

4 Leren landmeten **15**
4.1 Hoofdstuk 18, opgave 2 . . . 15
4.1.1 Uitwerking met behulp van de *Tafel Tangentium* . . . 15
4.1.2 Uitwerking met behulp van de *Tafel Sinuum* . . . 16
4.2 Hoofdstuk 18, opgave 7 . . . 16
4.2.1 Uitwerking . . . 16
4.2.2 Van Ceulens antwoordcontrole . . . 17
4.3 Hoofdstuk 19, opgave 1 . . . 17
4.3.1 Uitwerking . . . 18
4.4 Hoofdstuk 19, opgave 4 . . . 19
4.4.1 Uitwerking . . . 19
4.4.2 Twee andere methoden . . . 21
4.4.3 De stelling van Heron . . . 21
4.5 Hoofdstuk 19, opgave 7 . . . 23
4.5.1 Uitwerking . . . 23
4.6 Hoofdstuk 19, opgave 10 . . . 25
4.6.1 Het bepalen van de diameter op de manier van Van Ceulen . . . 25
4.6.2 Het bepalen van de diameter op de manier van Helmreich . . . 25
4.6.3 Het bepalen van de gevraagde oppervlakte $ABCD$ . . . 26
4.7 Hoofdstuk 19, opgave 12 . . . 26
4.7.1 Uitwerking door Van Ceulen op de manier van Reymers . . . 27
4.7.2 Uitwerking van het aangepaste proefstuk door Van Ceulen . . . 27

5 Liefhebbende landmeters of landmetende liefhebbers? **30**
5.1 Van Ceulens retoriek . . . 30
5.1.1 De voorreden . . . 30
5.1.2 De hoofdstukken . . . 31
5.1.3 Een overtuigende publieksvoorkeur? . . . 32
5.2 Vergelijkend warenonderzoek . . . 33
5.2.1 Tabellen leren . . . 33
5.2.2 Nauwkeurig meten . . . 33
5.2.3 Wiskunde ter afsluiting? . . . 34
5.2.4 Theorie vs. Praktijk . . . 35

6 Conclusie **36**

7 Literatuur **38**

8 Bijlage **39**

1 Inleiding

In 2010, het vierhonderdste sterfjaar van Ludolph van Ceulen, wordt de zestiende-eeuwse rekenmeester vooral herdacht vanwege zijn werk op het gebied van het benaderen van π. In *Vanden Circkel*, Van Ceulens hoofdwerk uit 1596, geeft hij π in maar liefst 20 decimalen. Dat is echter niet het enige van belang dat er in dit boek gebeurt. Ook legt Van Ceulen bijvoorbeeld in zijn werk het gebruik van Sinus-, Tangens-, en Secanstabellen uit. Dit zou, blijkens het titelblad, zeer nuttig zijn voor de landmeters. In zijn inleidingen bij het boek weidt Van Ceulen verder uit over deze tabellen en hun praktische inzetbaarheid bij het landmeten, waarbij vooral de hoofdstukken uit *Vanden Circkel* waarin dit onderwerp aan bod komt, de hoofdstukken zeventien tot en met negentien, uitgebreid worden aangekondigd. Het is opvallend dat juist deze hoofdstukken, die men tegenwoordig wiskundig gezien het minst interessant lijkt te vinden, zoveel aandacht krijgen van Van Ceulen. De vraag die zodoende rijst is welke rol deze hoofdstukken in Van Ceulens ogen moeten hebben gehad. Zag hij deze hoofdstukken wellicht als het nuttige resultaat van zijn inspanningen? Of legt hij de nadruk op deze hoofdstukken om de relevantie van zijn eigen werk aan te geven en is de aandacht voor de als praktisch neergezette hoofdstukken te beschouwen als een reclamemiddel voor een verder theoretische verhandeling? En bestond het beoogde publiek voor de hoofdstukken zeventien tot en met negentien uit landmeters of wil Van Ceulen in deze hoofdstukken tevens een gesprek aangaan met de meer theoretische wiskundigen van zijn tijd?

In deze scriptie wil ik nagaan of uit de schrijfstijl, werkwijze en gekozen opgaven van hoofdstuk zeventien tot en met negentien uit *Vanden Circkel* blijkt voor welk publiek en met welk doel deze hoofdstukken zijn geschreven. Om de vraag te kunnen beantwoorden zal ik in de volgende vier hoofdstukken ingaan op verschillende aspecten van *Vanden Circkel*. In hoofdstuk twee zal ik allereerst een beeld schetsen van de context waarin *Vanden Circkel* is ontstaan en van de auteur Van Ceulen zelf. Bovendien zal ik kort ingaan op het zestiende-eeuwse beroep van landmeter, aangezien deze beroepsgroep een potentieel publiek voor *Vanden Circkel* vormde. In hoofdstuk drie zal ik vervolgens de tabellen bespreken die in *Vanden Circkel* te vinden zijn. Ik zal de Europese ontwikkeling van de goniometrische tabellen tot de zeventiende eeuw kort beschrijven en daarna ingaan op Van Ceulens eigen uitleg bij de tabellen uit *Vanden Circkel*. In hoofdstuk vier zal ik aan de hand van een aantal opgaven uit hoofdstuk achttien en negentien van *Vanden Circkel* Van Ceulens werkwijze demonstreren. In hoofdstuk vijf zal ik vervolgens ingaan op de retorische aspecten in de hoofdstukken zeventien tot en met negentien van *Vanden Circkel*, waarbij ik ook inga op de twee voorreden bij het werk. Tevens zal ik de retoriek, opgaven en werkwijze van Van Ceulen vergelijken met de retoriek, opgaven en werkwijze uit drie landmeetkundige boeken uit dezelfde periode. Op deze manier kan ik nagaan of het beoogde publiek van Van Ceulen uit landmeters bestond of dat hij wellicht toch een ander of breder publiek voor ogen had. In de conclusie zal ik ten slotte mijn bevindingen nog eens kort samenvatten en ingaan op het mogelijke doel dat Van Ceulen met zijn 'landmeetkundige' hoofdstukken had.

Verantwoording

De gehele tekst van *Vanden Circkel* is online te raadplegen op www.ludolphvanceulen.nl. Hier is zowel de gedigitaliseerde versie van *Vanden Circkel* te vinden, als een transcriptie daarvan.

Graag wil ik ten behoeve van de duidelijkheid nog enkele opmerkingen vooraf maken. De eerste opmerking betreft het gebruik van goniometrische termen als *sinus*. In de tijd van Van Ceulen beschouwde men de Sinus en de Tangens etc. als lijnstukken (met lengte). Tegenwoordig echter worden de sinus en de tangens beschouwd als dimensieloze functies. Om dit onderscheid duidelijk te maken zal ik in mijn scriptie de goniometrische termen met een kleine letter schrijven wanneer ik deze in moderne zin gebruik. Wanneer ik deze termen echter in de zin van Van Ceulen en zijn collega's gebruik, zal ik deze met een hoofdletter schrijven. In hoofdstuk drie van mijn scriptie zal ik gedetailleerd ingaan op Van Ceulens gebruik van de goniometrische termen.

Een tweede opmerking betreft het gebruik van de *Elementen* van Euclides door Van Ceulen. Wanneer Van Ceulen naar een stelling uit de *Elementen* verwijst, zal ik dit aangeven middels de notatie EL.(nummer boek):(nummer stelling). EL.I:47 verwijst zodoende naar de 47^{ste} stelling uit het eerste boek van de *Elementen*. De genoemde stellingen zijn terug te vinden in de bijlage bij deze scriptie.

Wat opvalt aan de opgaven die Van Ceulen behandelt, is dat hij met de gegevens niet altijd even zorgvuldig omgaat. Een aantal keer vermeldt hij enkele gegevens niet in zijn tekst, maar dient de lezer dit uit de bijbehorende figuur af te leiden. Alhoewel ik Van Ceulen in deze scriptie zo dicht mogelijk volg, ben ik niet meegegaan in deze (voor moderne lezers) slordigheden van Van Ceulen en heb ik de gegevens dan ook zo volledig mogelijk weergegeven aan het begin van elke vraag.

Ten slotte nog een opmerking over de Archimedische benadering van π, waar Van Ceulen zeer veel gebruik van maakt in de hoofdstukken zeventien tot en met negentien uit *Vanden Circkel*. Archimedes had π ingesloten tussen twee grenswaarden: $3\frac{10}{71} < \pi < 3\frac{1}{7}$. Van Ceulen gebruikt in veel van zijn opgaven de bovengrens als benadering voor π (alvorens hij de lezer aantoont dat je met zijn eigen benadering van π op een veel nauwkeuriger antwoord uitkomt). Van Ceulen zelf benadert π overigens als volgt: $3,14159265358979323846 < \pi < 3,14159265358979323847$.

Dankwoord

Veel dank ben ik verschuldigd aan mijn scriptiebegeleider Steven Wepster. Met behulp van zijn geduldige aanwijzingen heeft mijn onderzoek geresulteerd in deze scriptie, waarin ik tevens mijn letterkundige achtergrond ruimschoots aan bod mocht laten komen.

2 Van Ceulen in context

Voordat ik de 'landmeetkundige' hoofdstukken uit *Vanden Circkel* zal behandelen, lijkt het mij nuttig om kort in te gaan op de context waarin het gehele werk verscheen. In dit eerste hoofdstuk zal ik daarom allereerst het wetenschappelijke klimaat in de Republiek der Verenigde Nederlanden van de zestiende eeuw schetsen. Van Ceulens leven, dat zich voor het grootste gedeelte in deze eeuw afspeelde, komt aan bod in de tweede paragraaf van dit hoofdstuk. Omdat de beroepsgroep van landmeters volgens Van Ceulen zou kunnen profiteren van de hoofdstukken zeventien tot en met negentien van *Vanden Circkel*, zal ik ten slotte het zestiende-eeuwse beroep van landmeter toelichten.

2.1 Op weg naar de Gouden Eeuw

De zestiende eeuw kan gezien worden als het beginpunt van een samenhangende Nederlandse wiskundige traditie.[1] Alhoewel de Republiek in eerdere eeuwen ook enkele wiskundige talenten kende, werd vòòr de zestiende eeuw slechts bij uitzondering wiskundeonderwijs – dat wil zeggen onderwijs in meet- en rekenkunde – aangeboden en was het niet gebruikelijk om beroepshalve een vorm van wiskunde uit te oefenen. In de loop van de zestiende eeuw kwam hier echter verandering in. Mede door de economische groei, de zich uitbreidende handel en verschillende ontdekkingsreizen veranderde het educatieve systeem in de Nederlanden. Er ontwikkelden zich Franse scholen, waar in de handelstaal (Frans) werd onderwezen en die meetkunde en rekenkunde in hun curriculum opnamen. Bovendien groeide het aantal mensen dat beroepshalve een vorm van wiskunde toepaste, waaronder zeevaarders en landmeters. De opkomst van de *mathematical practitioners* was een feit.[2] Deze wiskundige beoefenaars, ingenieurs en instrumentenmakers, vormden in de loop van de zestiende eeuw een nieuwe sociale categorie tussen de academische wetenschappers en de ongeschoolde ambachtslieden. In de Noordelijke Nederlanden waren ze vooral gericht op de ontwikkeling van vestingbouwkunde (door de oorlog met Spanje), navigatie en het maken van kaarten (vanwege de handel) en waterbeheer (bijvoorbeeld de aanleg en versterking van dijken en het droogleggen van stukken land). De opkomst van de ingenieurs zorgde voor een toenemende vraag naar praktische wiskundige kennis en het beroep van 'rekenmeester' werd populair. Deze rekenmeesters, die tot dezelfde nieuwe sociale categorie gingen behoren als de *mathematical practitioners*, boden tegen betaling wiskundige training aan, die veelal een sterk praktisch karakter had.

De ingenieurs en instrumentenmakers, wier werk een wiskundige basis had, speelden een grote rol in het wetenschappelijke milieu in de Nederlanden. De wetenschap in de Noordelijke Nederlanden kreeg in de tweede helft van de zestiende eeuw bovendien een enorme impuls door de komst van immigranten uit de Zuidelijke Nederlanden, dat met de stad Antwerpen lange tijd het culturele en wetenschappelijke centrum van de Nederlanden was geweest. Zeker na de val van Antwerpen in 1585 vertrokken naast vele schrijvers, schilders en wetenschappers ook uitgevers en drukkers naar het Noorden, waardoor het culturele en wetenschappelijke centrum in de Noordelijke Nederlanden kwam te liggen.[3]

Naast deze twee invloedrijke impulsen, speelden universiteiten tot het begin van de zeventiende eeuw een vrij kleine rol in het wetenschappelijke milieu. De eerste universiteit van de Noordelijke Nederlanden was in 1575 in Leiden opgericht. Het doel van deze universiteit was allereerst educatief en de universiteitsprofessoren hielden zich zodoende meer met onderwijs dan met onderzoek bezig. Bovendien was het universitaire onderwijs vooral tekstgericht, waardoor wiskunde en de natuurwetenschappen nauwelijks werden onderwezen.[4] Tot het eind van de zestiende eeuw werd wiskundige training voor *mathematical practitioners* dan ook enkel gegeven op de Franse scholen en door de rekenmeesters. Dit veranderde toen Maurits in 1600 de 'Duytsche Mathematique' oprichtte, een school voor militaire ingenieurs waar onder andere Euclidische meetkunde, goniometrie, landmeetkunde, stereometrie en vestingbouwkunde werd onderwezen in de landstaal. Op deze ingenieursschool, die verbonden was aan de Universiteit Leiden, stond zowel theorie van de praktische wiskunde als veldwerk op het programma.[5]

[1] Alberts, Atzema en Van Maanen (1999: 370)
[2] Alberts, Atzema en Van Maanen (1999: 371)
[3] Van Berkel, Van Helden en Palm (1999: 13)
[4] Van Berkel, Van Helden en Palm (1999: 29 - 31)
[5] Alberts, Atzema en Van Maanen (1999: 372)

Al deze ontwikkelingen vormden de opmaat voor de grote wetenschappelijke groei in de Republiek der Nederlanden in de zeventiende eeuw. De Gouden Eeuw kon beginnen.

2.2 Ludolph van Ceulen

Temidden van alle maatschappelijke en wetenschappelijke veranderingen van de zestiende eeuw werd op 28 januari 1540 Ludolph van Ceulen in Hildesheim geboren als zoon van koopman Gerardus van Ceulen en Hestera de Roode.[6] Over zijn vroege jeugd in Duitsland is weinig bekend. Rond zijn twintigste verbleef Van Ceulen zeer waarschijnlijk een poosje bij zijn broer in Antwerpen, vanwaar hij ruimschoots voor de Spaanse Furie van 1574 naar de Noordelijke Nederlanden vertrok. Al in 1562 vestigde hij zich als schermmeester in Delft, waar hij tegelijkertijd lesgaf in meet- en rekenkunde. Het geven van privélessen in zowel schermen als rekenen bleek een vruchtbare combinatie. Schermen was immers één van de basisvaardigheden voor jongens uit de gegoede burgerij en als rekenmeester kon Van Ceulen bovendien hun vaders van advies dienen in financiële kwesties.[7]

Of het aan de gunstige combinatie van schermen en rekenen lag is niet te zeggen, maar als rekenmeester genoot Van Ceulen een zekere bekendheid onder zijn tijdgenoten die de grenzen van de stad Delft overschreed. Dit blijkt onder andere uit het feit dat hij op grond van zijn goede reputatie betrokken raakte bij een dispuut tussen Nicolaus Petri en de Haarlemse rekenmeester Willem Goudaen. Net als tegenwoordig was het in de zestiende eeuw van belang om als 'zelfstandig ondernemer' reclame voor jezelf te maken. Rekenmeesters deden dit door middel van het opgeven van vraagstukken aan collega's, die deze vraagstukken vervolgens opgelost en voorzien van een wedervraag dienden te retourneren. In 1580 nagelde de rekenmeester Goudaen zijn vraagstuk aan de kerkdeur in Haarlem, waarbij hij een kan wijn uitloofde voor degene die de juiste oplossing vond. Petri loste het vraagstuk - waarin naar de hoogte en oppervlakte van een onregelmatige vierhoek met bekende zijden en een rechte hoek werd gevraagd - op en stuurde Goudaen bovendien een wedervraag. Goudaen erkende het antwoord van Petri echter niet als juist en weigerde de kan wijn te overhandigen. Vervolgens nagelde Goudaen in 1583 de wedervraag van Petri - waarin naar de hoogte van een onregelmatige vijfhoek met bekende zijden en twee rechte hoeken werd gevraagd – aan de kerkdeur in Haarlem. Een duidelijk geval van plagiaat. Petri zocht naar aanleiding van dit onrecht hulp bij onder andere Stevin en Van Ceulen, waaruit Van Ceulens reputatie als wiskonstenaar blijkt. Van Ceulen reisde hierop af naar Haarlem, alwaar hij de opgaven oploste.[8] Dit resulteerde in één van de drie kleine werken die hij tijdens zijn leven publiceerde.[9] Overigens was dit niet het enige dispuut waarin Van Ceulen verzeild raakte. Zijn overige twee korte werken wijdde hij namelijk aan de publicaties van Simon van der Eycke, waarin Van der Eycke een onjuiste waarde voor π vindt. In deze werken toont Van Ceulen het ongelijk van Van der Eycke aan.[10]

De reputatie van Van Ceulen strekte echter verder dan de kringen van zijn collega-wiskonstenaars, want ook onder regenten was Van Ceulen bekend. In de jaren tachtig van de zestiende eeuw was zijn scherm- en rekenschool zelfs gevestigd in de kapel van het Sint Agathaklooster, dat destijds het hof van Willem van Oranje herbergde.[11] Van Ceulen beschikte zodoende over een groot netwerk, dat hem bij het verloop van zijn carrière zeer waarschijnlijk ten goede is gekomen.

In 1590 hertrouwde weduwnaar Van Ceulen met Adriana Simons, de weduwe van zijn collega-rekenmeester Bartolomeus Cloot. Vier jaar later vertok het gezin Van Ceulen uit Delft en vestigde het zich in de universiteitsstad Leiden, waar Ludolph opnieuw een schermschool opende. In 1596 kwam zijn grote werk uit dat tot op heden voortleeft in wiskundige kringen: *Vanden Circkel.* Voor dit omvangrijke werk berekende Van Ceulen onder andere π in 20 decimalen en stelde hij een tabel op met daarin de lengten van de zij-

[6] Uitgebreid archiefonderzoek naar het leven van Van Ceulen deed Friedrich Katscher (1979), op wiens artikel deze paragraaf voor een groot deel is gebaseerd.

[7] Wepster (2010b: 1)

[8] Wepster (2010b: 1 - 2)

[9] Van Ceulen (1584) *Solutie ende werckinghe op twee geometrische vraghen by Willem Goudaen inde jaeren 1580 ende 1583 binnen Haerlem aenden kerckdeure ghestelt: mitsgaders propositie van twee andere geometrische vraghen.* Cornelis Claesz, Amsterdam.

[10] Katscher (1979: 107 - 109)

[11] Wepster (2010b: 1), Katscher (1979)

den van regelmatige n-hoeken voor $n \in \{3, \ldots, 80\}$.[12] Bovendien voegde hij goniometrische tabellen in, inclusief enkele hoofdstukken waarin hij opgaven behandelde die met behulp van deze tabellen moeten worden opgelost. Deze hoofdstukken, waarop Van Ceulen sterk de nadruk legt in zijn beide voorwoorden, zijn het onderwerp van deze scriptie.

Dat Van Ceulens uitgebreide netwerk hem geen windeieren legde, bleek wel toen hij in 1600 door Maurits werd aangesteld als docent rekenkunde, landmeetkunde en vestingbouwkunde aan de pas opgerichte 'Duytsche Mathematique'. Zo mocht Van Ceulen zich de laatste jaren van zijn leven, zonder dat hij Latijn of Grieks kende, *professor extraordinarius* noemen. Een eervolle titel waarop de professoren aan de Leidse universiteit zelf (die de titel *professor ordinarius* droegen) overigens enigszins neerkeken. Van Ceulen werkte tot aan zijn dood op 31 december 1610 aan de ingenieursschool van Prins Maurits.[13]

Dat Van Ceulen na zijn dood in de herinnering bleef voortleven, blijkt wel uit het feit dat er in 2010, zijn vierhonderdste sterfjaar, enkele activiteiten rondom Van Ceulen plaatsvinden. Zelf had Van Ceulen tijdens zijn leven zo zijn eigen ideeën over zijn herdenking. In navolging van Archimedes was zijn wens een grafsteen met daarop het getal π in de 35 door hem zelf berekende decimalen. Deze grafsteen is er daadwerkelijk gekomen, in de Pieterskerk te Leiden. Helaas is het origineel hiervan verloren gegaan, maar deze is inmiddels vervangen door een replica. De weduwe van Van Ceulen heeft indertijd ook haar steentje bijgedragen haar overleden man niet te doen vergeten, al dan niet uit financiële noden.[14] In 1615 gaf zij het laatste werk van Van Ceulen uit, de *Fondamenten*, een mengeling van arithmetische, geometrische, goniometrische en algebraïsche problemen dat tevens het getal π bevatte in 32 decimalen.[15] Een andere belangrijke bijdrage aan de postume roem van Van Ceulen kwam van zijn vroegere leerling Willebrord Snellius, een klassiek geschoolde academicus die de *Fondamenten* in het Latijn vertaalde en zijn eigen commentaar bijvoegde. Zowel tijdens als na zijn leven bleek Van Ceulen zodoende een eerbiedwaardig man, voor wie het predicaat 'rekenmeester' door zijn interessante wiskundige bijdragen en theoretische overpeinzingen ernstig tekort schiet.

2.3 Landmeetkunde in de zestiende eeuw[16]

Niet alleen het wetenschappelijke en maatschappelijke klimaat in de Republiek was erg aan het veranderen in de zestiende eeuw. Ook het beroep van landmeter was aan verandering onderhevig gedurende deze periode. In de middeleeuwen was de landmeter nog een ambtelijke figuur, die zich voornamelijk bezighield met perceelmetingen en het aanleggen, bijhouden en verbeteren van registerboeken. De landmeter werd in de zestiende eeuw echter meer en meer een beoefenaar van een vrij en beschermd beroep dat hij uitoefende op contractbasis, waarbij de bescherming van het beroep hem verzekerde van werk en inkomen. Zogenaamde gezworen landmeters waren in het bezit van een vergunning voor het beoefenen van landmeetkundige werkzaamheden, afgegeven (soms na een examen) door een officiële instantie. Werkgevers waren veelal de waterschappen, de gewestelijke besturen en rekenkamers, en vanaf het midden van de zestiende eeuw kwamen hier onder meer particulieren en kerkelijke instanties bij.

In het begin van de zestiende eeuw was het meest voorkomende werk van de gezworen landmeters het opmeten van onroerend goed ten behoeve van (ver)koop, pacht en belastingheffing. In de loop van de zestiende eeuw kreeg de landmeter echter steeds meer taken. Sinds de uitvinding van de boekdrukkunst in 1450 kwam het vervaardigen van kaarten in zwang. Waar landmeters zich aan het begin van de zestiende eeuw nog voornamelijk op perceelsmeting richtten, gingen zij zich vanaf de tweede helft van de zestiende eeuw ook bezighouden met het maken van kaarten van grotere gebieden. Verder werd de landmeter steeds meer gezien als een onafhankelijke (en dus onpartijdige) deskundige en werden landmeters zodoende vaker ingezet bij grensbepalingen, het uitzetten van wegen, verkaveling en eventuele geschillen. Vanwege de grote bevolkingstoename in de zestiende eeuw ging men zich bovendien bezighouden met de drooglegging van stukken land en de landmeter was betrokken bij de technische uitvoering hiervan. Algemeen waterbeheer speelde in de Nederlanden niet alleen vanwege de drooglegging een grote

[12] Wepster (2010b: 5)
[13] Alberts, Atzema en Van Maanen (1999: 372)
[14] Wepster (2010b: 7)
[15] Katscher (1979: 119)
[16] Voor deze paragraaf heb ik gebruik gemaakt van deel 3 en 6 van Pouls (1997)

rol, maar ook bijvoorbeeld vanwege de oorlog met Spanje. Om de vijand te stoppen werden soms dijken doorgebroken, waarbij stukken land onder water kwamen te staan wat de vijand belette verder op te rukken. Landmeters werden onder andere ingezet om de achteraf ontstane schade hiervan op te nemen.

Alhoewel veel landmeters de kunst van het landmeten in de praktijk leerden, konden zij in de zestiende eeuw ook in de leer gaan bij rekenmeesters of scholen bezoeken waar de boeken van Euclides en rekenkunde werd onderwezen. In de tweede helft van de zestiende eeuw begonnen er steeds meer landmeetkundige werken in druk te verschijnen, wat zeker heeft bijgedragen aan de ontwikkeling van de wiskundige onderlegdheid van landmeters. Op de inhoud van dergelijke boeken zal ik in het vijfde hoofdstuk van deze scriptie dieper ingaan. Duidelijk is in elk geval dat de praktijk van het landmeten steeds meer verantwoordelijkheden met zich meebracht en zodoende steeds meer kennis vereiste. Dat Van Ceulen kennis van de goniometrie van belang leek te achten voor de landmeters zal ik in de komende hoofdstukken laten zien.

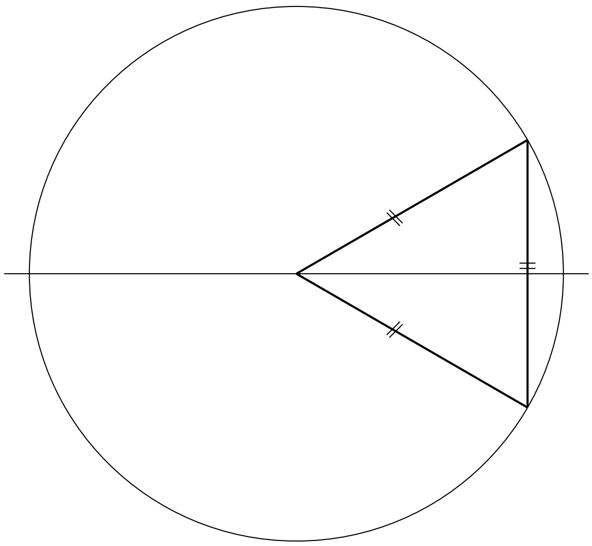
3 Nuttige tabellen voor landmeters (en vele anderen)

Goniometrische tabellen beslaan een aanzienlijk deel van Van Ceulens *Vanden Circkel*. De aanwezigheid van de Sinus-, Tangens- en Secanstabellen staat dan ook op het titelblad duidelijk vermeld, inclusief de opmerking dat deze tabellen bijzonder nuttig zijn voor landmeters. Voorafgaand aan de tabellen, in hoofdstuk zeventien, geeft Van Ceulen voor de Nederlandse lezer een uitleg bij de tabellen. In dit hoofdstuk zal ik deze uitleg onder de loep nemen. Alvorens echter deze uitleg te bekijken, is het interessant om na te gaan in welke traditie de tabellen geplaatst kunnen worden.

3.1 Korte geschiedenis van de Europese trigonometrie tot aan de zeventiende eeuw

Dat goniometrische tabellen nuttig zouden zijn voor landmeetkundigen was niet altijd vanzelfsprekend.[17] Eeuwenlang werd goniometrie namelijk vooral gebruikt door astronomen, die de (bol)driehoeksrekening nodig hadden voor hun astronomische berekeningen. Dankzij de verspreiding van Arabische en Griekse astronomische kennis kwam de goniometrie, oftewel driehoeksmeting, vanaf de twaalfde eeuw na Christus in de Europa terecht. Een zeer belangrijke inspiratiebron voor Europese geleerden die zich vanaf toen bezighielden met de trigonometrie als onderdeel van hun astronomische onderzoekingen, was de *Almagest* van Ptolomeus, een omvangrijk astronomisch werk uit de tweede eeuw na Christus.

In de *Almagest* wilde Ptolomeus een model maken voor de bewegingen van de hemellichamen. Hiervoor had hij een tabel nodig waarin de lengte van een koorde bij een gegeven hoek te vinden is. Deze tabel is vergelijkbaar met een moderne sinustabel, doch niet geheel hetzelfde. In zijn werk liet Ptolomeus zien hoe hij een dergelijke tabel opstelde. Hij gebruikte hiervoor als basis een cirkel met een straal van 60. Zijn tabel stelde hij op voor hoeken van 0° tot 180°, met een stapgrootte van een halve graad. Het berekenen van sommige koorden is gemakkelijk met behulp van Euclidische meetkunde. Zo ontstaat er bij een hoek van 60° een gelijkzijdige driehoek zodat de gezochte koorde net als de straal gelijk is aan 60:



Bij een hoek van 90° is er sprake van een rechthoekige driehoek waarop de stelling van Pythagoras (EL.I:47) is toe te passen, zodat de gezochte koorde gelijk is aan $\sqrt{60^2 + 60^2} = 60\sqrt{2}$. Ook de koorden behorend bij 120°, 36° en 72° zijn met behulp van elementaire meetkunde gemakkelijk te bepalen. Vervolgens gebruikte Ptolomeus een aantal stellingen om met behulp van de nu bekende koorden meer koorden te berekenen. Hij had de beschikking over de stelling Pythagoras en de stelling van Thales,

[17] Informatie over de goniometrie in Europa kan worden gevonden in Van Brummelen (2009: 223 - 283) en Von Braunmühl (1900: 86 - 248). Deze paragraaf is in hoge mate gebaseerd op deze publicaties.

waarmee hij de koorde behorend bij $180° - \angle\Theta$ voor een gegeven Θ kon vinden. Verder leidde Ptolomeus stellingen af waarmee hij de koorde van de som en het verschil van hoeken kon berekenen. De laatste stelling die hij tot zijn beschikking had was een stelling om de koorde van een halve hoek te vinden. Het probleem was nu echter dat je met behulp van deze stellingen de koorde behorend bij 1∘ niet kunt berekenen. Ptolomeus moest daarom deze koorde benaderen en dit deed hij met behulp van de stelling (hier in moderne formulevorm weergegeven) $\frac{koorde(\angle\alpha)}{koorde(\angle\beta)} < \frac{\angle\alpha}{\angle\beta}$ voor $0 < \beta < \alpha < 90°$. Ptolomeus vulde voor $\angle\alpha$ de waarde 1° in (de waarde die hij wilde benaderen) en voor $\angle\beta$ de waarde $\frac{3}{4}^{\circ}$ (een waarde die hij met behulp van de stellingen kon vinden). Vervolgens vulde hij voor $\angle\beta$ de waarde 1° in en voor $\angle\alpha$ de waarde $\frac{3}{2}^{\circ}$. Hierdoor vond Ptolomeus dat $\frac{2}{3} \times koorde(\frac{3}{2}^{\circ}) < koorde(1°) < \frac{4}{3} \times koorde(\frac{3}{4}^{\circ})$. Deze beide grenzen kwamen volgens de berekening van Ptolomeus op hetzelfde uit, zodat hij de waarde voor koorde (1°) had gevonden en zo zijn tabel kon maken.[18]

Zoals gezegd was de *Almagest* een bron van inspiratie voor Europese astronomen van de twaalfde eeuw en later. Vergeleken met de methode van Ptolemeus bleek het echter gemakkelijker om te werken met de halve koorde, behorend bij de dubbele hoek. Wanneer Ptolemeus dus werkte met de hele koorde behorend bij bijvoorbeeld 30°, gingen geleerden in de loop van de tijd werken met de halve koorde bij 60°. Met dit inzicht, dat toegeschreven kan worden aan wiskundigen uit India, werd de stap van het berekenen van koorden naar het berekenen van de Sinus gemaakt. Dit begrip Sinus dat ook Van Ceulen nog gebruikt, is overigens niet geheel hetzelfde als ons huidige begrip sinus. Een belangrijk verschil is dat wiskundigen tegenwoordig de sinus opvatten als een functie, terwijl in de tijd van Van Ceulen de Sinus werd opgevat als een lijnstuk (met lengte). In combinatie met het inzicht uit India werd in veel astronomische boeken voortgeborduurd op de tabel en methode van Ptolomeus. Zo vervaardigde bijvoorbeeld Levi Ben Gerson (1288-1344) een Sinustabel met een stapgrootte van $\frac{1}{4}^{\circ}$, in plaats van de halve graad die we bij Ptolomeus aantreffen. Met behulp van een kleinere stapgrootte kon men nauwkeuriger interpoleren tussen de verschillende waarden. In de loop van de tijd ging men bovendien werken met een steeds grotere straal van de basiscirkel. Hierdoor kon men de Sinus in steeds meer significante cijfers geven, zonder dat deze significante cijfers achter de komma terechtkwamen. De Weense geleerde Georg Peurbach (1421-1461) zette bijvoorbeeld een nieuwe stap door een basiscirkel met straal 600.000 te nemen. Uit het feit dat Peurbach deze straal koos, blijkt dat men in zijn tijd nog niet geheel vertrouwd was met het decimale stelsel en vaak nog werkte met een sexagesimaal stelsel, of een combinatie van beide. Peurbachs werk is bovendien van belang, omdat hierin de eerste Europese Tangenstabel te vinden is, zij het niet in druk. De eerste Tangenstabel in druk komt namelijk van zijn leerling Johannes Müller, oftewel Regiomontanus (1436-1476). Deze wetenschapper heeft een grote invloed gehad op de verspreiding van de kennis van de goniometrie in Europa. Zo gaf hij in *De triangulis omnimodis* een zeer gestructureerd en volledig overzicht van de stand van zaken in de driehoeksmeetkunde (zowel vlak als bol) in zijn tijd. Hierin kwam de bedoelde Tangenstabel echter nog niet voor. Deze verscheen in het in 1490 postuum gepubliceerde *Tabula directionum*, waarin de eerste tabellen in drukvorm te vinden zijn. Regiomontanus gebruikte voor deze tabellen een basiscirkel met straal 100.000, waarmee een verschuiving naar het decimale stelsel is waar te nemen. Dit boek was zeer populair en heeft wellicht bijgedragen aan de verspreiding van de Tangens en de tabellen. Alhoewel de boeken de goniometrie als een op zichzelf staande discipline lijken te behandelen, plaatste Regiomontanus het gebruik van de goniometrie toch nog volledig in het domein van de astronomie.

De nauwkeurigheid van de tabellen nam telkens toe – en daarmee ook het rekenwerk. Hierdoor werd het steeds belangrijker om handige formules te vinden die het rekenwerk verminderden. Johann Werner (1468-1522) vond bijvoorbeeld een werkbesparende formule om vermenigvuldiging in enkele gevallen te vervangen door een verschil. Ook Copernicus (1473-1543) zorgde voor een bijdrage die het rekenwerk zou verminderen. Hij vervaardigde namelijk de eerste Secanstabel, waardoor deling door de Cosinus vervangen werd door vermenigvuldiging (de Secans is immers de reciproke van de Cosinus). Of deze bijdrage echter voor het geleerde publiek beschikbaar zou worden is nog maar de vraag; hij schreef de tabel in de kantlijn van zijn uitgave van Regiomontanus' tabellen. In zijn eigen astronomische werk gaf hij overigens

[18]Een meer gedetailleerde beschrijving van Ptolomeus' methode is onder andere vindbaar in Van Brummelen (2009). Ptolemeus vond dat beide grenzen uitkwamen op 1;2,50 (hij werkte met een sexagesimaalsysteem), wat in ons decimale stelsel neerkomt op $1 + \frac{2}{60} + \frac{50}{60^2} \approx 1,047222$. De bovenste waarde is echter gelijk aan 1;2,50,40, zodat Ptolemeus in ons decimale stelsel tot op 3 decimalen gelijk had.

wel Sinustabellen uit, waarbij hij basiscirkels met straal 100.000 en zelfs 10.000.000 gebruikte.

Een jonge collega van Copernicus was Johannes Rheticus (1514-1574). Ook hij leverde een belangrijke bijdrage aan de ontwikkeling van de goniometrie en de goniometrische tabellen. In 1551 werd van hem *Canon doctrinae triangulorum* uitgegeven, waarin hij als eerste een directe relatie legde tussen hoeken en zijden van driehoeken, zonder hierbij op cirkelbogen terug te grijpen. Bovendien bevatte dit werk omvangrijke tabellen waarin alle zes goniometrische grootheden (Sinus, Cosinus, Secans, Tangens, Cotangens en Cosecans) een plaats hebben. Voor de straal van zijn basiscirkel nam Rheticus een waarde van 10.000.000 en als stapgrootte nam hij 10 minuten (d.w.z. $\frac{1}{6}^{\circ}$). In het zelfde jaar als Van Ceulens *Vanden Circkel* verscheen postuum zijn werk *Opus Palatinum*, een zeer omvangrijk werk waarin Rheticus voor de tabellen een basiscirkel met een straal van maar liefst 1.000.000.000.000.000 gebruikte en een stapgrootte van 10 seconden (d.w.z. $\frac{1}{360}^{\circ}$).

De huidige naamgeving voor de Tangens en de Secans danken we overigens aan Thomas Fink (1561-1656) die in zijn *Geometria Rotundi* (1583) de tabellen voor Sinus, Tangens en Secans publiceerde met 10.000.000 als waarde voor de straal van de basiscirkel, met een stapgrootte van 1 minuut. In zijn werk verwerkte hij de nieuwe inzichten van onder andere Rheticus en diens collega Erasmus Reinhold (1511-1553). Het werk was geschreven in een leesbare stijl en dat heeft waarschijnlijk bijgedragen aan de snelle verspreiding ervan. Bovendien stond Fink in hoog aanzien bij zijn tijdgenoten, waaronder onder andere de Duitse astronoom Christoph Clavius (1537-1602) en de Nederlander Philip van Lansberg (1561-1632). Waar Clavius de tabellen in *Theodosii Tripolitae Sphaericorum libri III* uit 1586 berekende volgens de door Fink aangegeven methode voor een straal van 10.000.000, zijn Van Lansbergs tabellen uit *Triangulorum geometriae libri quator* (1591) zelfs rechtstreeks overgenomen van Fink.

Alhoewel het uit het voorgaande wellicht lijkt alsof de goniometrie in de zestiende eeuw inmiddels een zelfstandige discipline was, werd de goniometrie nog steeds als hulpmiddel ontwikkeld door voornamelijk astronomen. De methode van Ptolomeus bleef telkens de basis en vooral hoekdeling was van belang bij het vervaardigen van de tabellen. De sleutel voor het maken van de tabellen was namelijk de bepaling van de Sinus van de kleinste boog (hoek) in de tabel. Wanneer men een Sinustabel wilde maken die in ieder geval voor elke hele graad informatie verschafte, bleef altijd een benadering nodig zoals al bij Ptolomeus aan het licht kwam. Nauwkeurige tabellen werden echter steeds noodzakelijker, omdat men langzamerhand begon te ontdekken dat de tabellen konden worden ingezet bij praktische meetkunde. Hiermee doelde men niet enkel op astronomie, maar ook op bijvoorbeeld landmeetkunde. Alhoewel astronomie tot in de tijd van Van Ceulen de hoofdmotor was achter de verbetering en uitbreiding van de tabellen, werden driehoeksmeting en tabellen vanaf ongeveer het begin van de zestiende eeuw in steeds meer landmeetkundige werken gebruikt. In het eerste grote Nederlandse landmeetkundige werk *Practijck des Lantmetens* van Sems en Dou uit 1600, waarin praktisch alle kennis omtrent landmeetkunde uit die tijd te vinden is, worden o.a. Sinustabellen behandeld, waaruit blijkt dat deze ingeburgerd beginnen te raken in het landmeetkundige domein.

3.2 De tabellen in *Vanden Circkel*

En zo komen we langzaam maar zeker uit bij de tabellen van Van Ceulen uit zijn in 1596 gepubliceerde *Vanden Circkel*. Hoewel de tabellen van Van Ceulen en zijn Nederlandstalige uitleg – naar eigen zeggen de allereerste! – in hoofdstuk zeventien van *Vanden Circkel* aan de orde komen, leidt Van Ceulen het onderwerp aan het einde van het zestiende hoofdstuk al kort in. Hij geeft hier aan op de hoogte te zijn van de belangrijkste namen op het gebied van tabellen en noemt Regiomontanus, Reinhold, Rheticus, Clavius en Van Lansberg als geleerden die zich met de vervaardiging van tabellen hebben beziggehouden. Van Ceulen legt op verschillende plaatsen de nadruk op het feit dat hij in zijn werk een Nederlandse uitleg bij de tabellen geeft. Deze uitleg wordt onder andere aangekondigd op het titelblad en bij de aankondiging in hoofdstuk zestien staat Van Ceulen stil bij het feit dat een gepubliceerde Nederlandse uitleg aan hem nog niet bekend is.

Zeer opvallend is dat Van Ceulen eigenlijk nergens met een woord rept over het eventuele vele rekenwerk dat ongetwijfeld bij het maken van dergelijke tabellen (met straal 10.000.000 en stapgrootte 1 minuut) komt kijken. Over het werk dat het vinden van π in 20 decimalen hem gekost heeft, bericht hij bijvoorbeeld wel. Zo zegt hij in zijn voorwoord aan prins Maurits dat het vinden van de verhouding uiteindelijk geen kunst vereiste "maer grooten arbeydt dien ick niet gespaert en hebbe". Daar komt bij dat waar deze verhouding ter sprake komt in het vervolg van het boek, Van Ceulen steevast met zekere trots spreekt over "mijner proportie"[19], terwijl hij de tabellen telkens neutraal aanduidt met *de* tabellen. Tezamen met twee opmerkingen van Van Ceulen dat hij in een later werk de tabellen "volcomen" zal vinden, deed dit bij mij het vermoeden rijzen dat de tabellen uit *Vanden Circkel* wellicht niet door Van Ceulen zelf vervaardigd zijn, maar overgenomen zijn uit één van de door hem genoemde bronnen.[20]

Inderdaad lijkt er iets interessants aan de hand wanneer je de tabellen in *Vanden Circkel* vergelijkt met de tabellen in de boeken van Clavius en Van Lansberg.[21] Het lijkt erop alsof Van Ceulen de lay-out van de tabellen van Van Lansberg heeft gebruikt (d.w.z. dat de indeling in kolommen en rijen van beide tabellen zeer sterk overeenkomt) en de tabelwaarden van Clavius heeft overgenomen. Alhoewel dit vooralsnog een vermoeden is en verder zal moeten worden onderzocht, zou het kunnen verklaren waarom Van Ceulen zo weinig uitweidt over de vervaardiging van de tabellen. Zijn grote werk, waarin hij zijn nieuwe tabellen zou presenteren, is overigens nooit verschenen. Het verbeteren van de tabellen zou echter wel goed in Van Ceulens straatje hebben gepast. Zoals gezegd ging het bij vervaardiging van nauwkeurige tabellen immers om het benaderen van de kleinst gebruikte boog in de tabel met behulp van onder andere hoekdeling. Van Ceulen had bij zijn berekening van π zeer veel met hoekdelingen gewerkt, zodat hij al goed in de theorie voor het vervaardigen van de tabellen thuis was.[22]

Dat Van Ceulen de tabellen eventueel niet zelf heeft vervaardigd neemt niet weg dat hij gezorgd heeft voor een heldere Nederlandse uitleg van het gebruik van de tabellen. Alhoewel hij het woord Sinus gedurende het boek blijft aanhouden, begint zijn uitleg met de betekenis van dit uitheemse woord in het Nederlands. Van Ceulen definieert de Sinus als de helft van een rechte lijn die in de cirkel getrokken is zodanig dat beide uiteinden van deze lijn de omloop van de cirkel raken.[23] Deze definitie is nog niet sluitend (waar in de cirkel moet deze rechte lijn dan bijvoorbeeld getrokken worden?), maar Van Ceulen verduidelijkt zijn definitie met behulp van de volgende figuur. Er geldt dat de Sinus van boog CE, oftewel $\mathrm{Sin}(\angle CAE)$, wordt gegeven door DE. Van Ceulen legt in zijn uitleg overigens geen direct verband

[19] o.a. Van Ceulen (1596: fol.57v)

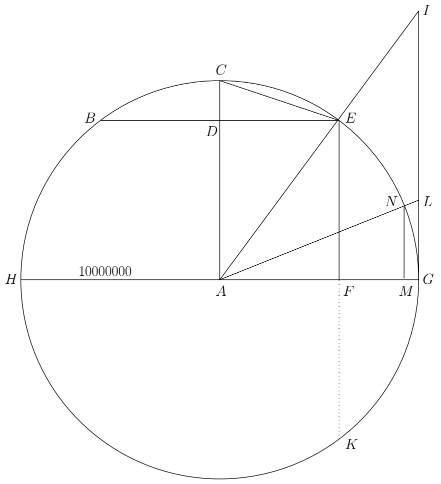
[20] In zijn voorwoord aan prins Maurits merkt Van Ceulen op: "...deur dien de Tafeleē Sinuum, Tangentium, eñ Secantium (soo naer men die begeerdt) volcomen gemaect kunnen werden welcke gevonden noodtwendighe Regel in desen (met de voornoemde Tafelen / eñ eensdeels het gebruyck van dien / hoogh noodigh voor de Land-meters / met veel ander conststucken) gevonden sullen werden / tot dat mijn groote werck in 't licht comt / daer inne den selven tegen den Diameter / ten minsten van 20.000.000 parten sullen zijn / soo verre mijn God verstant eñ leven spaert."
In hoofdstuk zestien komt Van Ceulen hierop terug: "...tot dat mijn groote werck in 't licht comt / daer inne de Tafelen / met samen den ghebruyck volcomen ghevonden sullen werden."(Van Ceulen (1596: fol.25r)

[21] Het gaat hier om de eerder genoemde boeken van Van Lansberg (*Triangulorum geometriae libri Quator*) uit 1591 en van Clavius (*Theodosii Tripolitae Sphaericorum libri III*) uit 1586.

[22] Zie voor een uitleg over Van Ceulens benadering van π bijvoorbeeld het onlangs in Pythagoras verschenen artikel van Steven Wepster(2010a).

[23] Zoals ik al eerder opmerkte wijkt deze definitie van Sinus af van het huidige begrip sinus. Van Ceulen vat, net als zijn collega-wiskonstenaars, Sinus op als een lijnstuk. De Sinus waarover Van Ceulen spreekt is zodoende geen functie, zoals het aan de moderne lezer bekende begrip sinus.

tussen de hoeken en de zijden van de driehoek, maar maakt gebruik van cirkelbogen. [24]



Hierna definieert Van Ceulen de Sinus Complement van boog CE als de Sinus van de boog EG, welke de grootte van $\angle EAG$ aangeeft. In het vervolg van mijn scriptie zal ik de Sinus Complement waarover Van Ceulen schrijft aanduiden met de term Cosinus. De Sinus van boog EG wordt voorgesteld door het lijnstuk $DA = EF$. Vanuit deze definitie behandelt Van Ceulen meteen een belangrijke goniometrische formule. Aangezien $\angle CAG = 90^\circ = \angle CAE + \angle EAG$, kun je namelijk in $\triangle AFE$ EL.I:47 toepassen, wat op de ons bekende formule $\mathrm{Sin}^2(\angle\alpha) + \mathrm{Cos}^2(\angle\alpha) = AE^2$ neerkomt (met in dit geval $\angle\alpha = \angle EAF$). Vervolgens definieert Van Ceulen de "verkeerde Sinus", oftewel de Sinus Versus, als DC, het lijnstuk dat samen met de Sinus Complement de straal maakt. Er geldt dat $DE^2 + DC^2 = CE^2$, waarbij CE het lijnstuk is dat onder de boog CE getrokken is.

Hierna construeert Van Ceulen punt I, door een loodlijn vanuit G op AG te trekken en de lijn AE door te trekken totdat beide lijnen elkaar snijden in I. Van Ceulen claimt vervolgens dat wanneer de boog EG bekend is (in roeden), alle zijden van driehoek AGI uit de tabellen afgeleid kunnen worden. Dit is niet geheel juist, omdat er ook één zijde bekend moet zijn, wil de grootte van de driehoek precies vast komen te liggen. In de standaardcirkel die Van Ceulen geeft, is basis AG inderdaad bekend.[25] Wil je echter in een andere dan de standaardcirkel werken, dan zul je niet genoeg hebben aan de booglengte van EG. In zijn voorbeeld geeft Van Ceulen dan ook zowel de basis van de driehoek (AG) als de boog EG. De lengte van GI is dan op te zoeken in de tabel onder *Perpendiculaer* of Tangens en de lengte van AI vind je onder *Snijder* of Secans. Van Ceulen geeft verder aan dat geldt: $\frac{\mathrm{Cos}(\angle\alpha)}{\mathrm{Sin}(\angle\alpha)} = \frac{AF}{EF} = \frac{AG}{GI}$, en aangezien hieruit volgt $GI = AG \times \frac{\mathrm{Sin}(\angle\alpha)}{\mathrm{Cos}(\angle\alpha)}$ is het inderdaad in te zien dat GI de Tangens is van $\angle IAG$. Evenzo laat Van Ceulen zien dat $\frac{AF}{AE} = \frac{AG}{AI}$, wat je kunt schrijven als $AI = \frac{AG}{\mathrm{Cos}(\angle\alpha)}$, zodat AI inderdaad de Secans blijkt van $\angle IAG$. Dat de genoemde verhoudingen gelden is gemakkelijk in te zien met behulp van de gelijkvormige driehoeken $\triangle AEF$ en $\triangle AIG$.

Van Ceulen gaat verder met een uitleg over het praktische gebruik van de tabellen. Het opzoeken zelf is natuurlijk vrij duidelijk, maar wat nu als je een lijn in de cirkel zoekt waarvan de bijbehorende boog geen geheel aantal graden en minuten is? De kleinste eenheid van de tabel is immers de minuut. En de tabel is gemaakt voor cirkels met een diameter van 20.000.000 dus hoe kun je de gevonden waarden zodanig omrekenen dat ze kloppen bij de in een opgave gegeven cirkel? Van Ceulen geeft onder andere het voorbeeld van een regelmatige zevenhoek, waaruit precies duidelijk wordt hoe je met de tabellen kunt werken. De vraag die Van Ceulen opgeeft is om de lengte van de zijden van de ingeschreven regelmatige

[24] Zoals eerder opgemerkt was Rheticus in 1551 de eerste die een expliciet verband tussen hoek en zijde legde zonder daarbij gebruik te maken van cirkelbogen.

[25] Van Ceulen gebruikt voor zijn uitleg in principe een cirkel met een ongedefinieerde straal en dit levert voor het theoretische gedeelte uiteraard geen problemen op. Uit het einde van hoofdstuk zestien en de informatie boven de tabellen kan worden afgeleid dat de basiscirkel voor de tabellen een diameter heeft van 20.000.000.

zevenhoek te vinden bij een cirkel met een diameter van 40 roeden (een veelgebruikte lengtemaat in de tijd van Van Ceulen). Om het antwoord te vinden deelt Van Ceulen allereerst de gehele omloop van de cirkel (360°) door 7, waaruit blijkt dat $\frac{1}{7}$ deel van de omloop gelijk is aan $51°25'42\frac{6}{7}''$. De helft hiervan is gelijk aan $25°42'51\frac{3}{7}''$. De Sinus van deze boog is precies de helft van de gezochte zijde. Omdat het hier een booglengte betreft die niet in gehele graden en minuten kan worden uitgedrukt, moet er gewerkt worden met lineaire interpolatie. Dat houdt in dat je allereerst de Sinus opzoekt van $25°42'$, waarvoor een waarde van 4336591 in de tabel is af te lezen. Vervolgens zoek je de Sinus op van $25°43'$, waarbij een waarde van 4339212 hoort. Het verschil in Sinuswaarde is zodoende 2621, terwijl het verschil in booglengte gelijk is aan 1 minuut, oftewel 60 seconden. Met behulp van de "regel van drieën" kun je vinden dat $51\frac{3}{7}''$ overeenkomen met 2246.[26] Dit tel je vervolgens op bij de gevonden waarde voor de Sinus van $25°42'$, waaruit volgt dat de gezochte waarde gelijk is aan 4338837. Dit getal staat echter uitgedrukt in *parten* (de lengte-eenheid van lijnstukken in de basiscirkel) en het gevraagde antwoord moet worden gegeven in *roeden*. Bovendien is in dit geval het gevraagde antwoord gelijk aan tweemaal de gevonden Sinus. Daarom gebruik je opnieuw de regel van drieën, namelijk 20.000.000 parten (de diameter van de basiscirkel) geven 40 roeden (de diameter van de cirkel in de opgave), hoeveel roeden geven 8677674 parten? Hieruit volgt dat de gezochte zijde ongeveer 17,35534 roeden lang is.

Van Ceulen geeft nog een klein aantal van dit soort voorbeelden, waarna er maar liefst 45 bladzijden met Sinus-, Tangens- en Secanstabellen volgen, waarvan een voorbeeld uit *Vanden Circkel* te zien is op de volgende pagina. De basisbeginselen van het werken met de tabellen heb ik in het voorgaande uitgelegd, waarbij ik grotendeels Van Ceulen heb gevolgd. Daarom zal ik vervolgen met een aantal (landmeetkundige) opgaven die Van Ceulen in hoofdstuk achttien en negentien van *Vanden Circkel* behandelt om te oefenen met de tabellen.

[26] Met de regel van drieën werden in de tijd van Van Ceulen opgaven aangeduid, waarin je met behulp van verhoudingen uit drie gegeven getallen het vierde evenredige getal dient te vinden.

Tafelen van Sinũum, Tangentium, **eñ** Secantium, **tegen** 20000000 **den Dia.**

Minu.	Sinus.	Perpen.	Snijder.			Sinus.	Perpen.	Snijder.
	0	0	0	Gradē		1	1	1
0	0	0000	10000000		0	174524	174550	10001524
1	2909	2909	10000001		1	177433	177459	10001574
2	5818	5818	10000002		2	180341	180365	10001656
3	8727	8727	10000004		3	183250	183279	10001679
4	11636	11636	10000008		4	186158	186189	10001733
5	14544	14544	10000010		5	189066	189100	10001788
6	17453	17452	10000014		6	191975	192010	10001844
7	20362	20361	10000020		7	194883	194920	10001900
8	23271	23270	10000027		8	197792	197830	10001957
9	26180	26179	10000034		9	200700	200740	10002015
10	29088	29088	10000042		10	203608	203650	10002074
11	39197	31996	10000051		11	206517	206561	10002134
12	34906	34905	10000060		12	209425	209471	10002195
13	37815	37814	10000071		13	212333	212381	10002256
14	40724	40723	10000083		14	215241	215291	10002319
15	43632	43632	10000095		15	218149	818201	10001381
16	47541	46541	10000108		16	221057	221111	10002445
17	49450	49450	10000122		17	223965	224022	10002510
18	52359	52359	10000137		18	226873	226932	10002576
19	55268	55268	10000152		19	229781	229842	10002642
20	58177	58177	10000168		20	232689	232752	10002709
21	61086	61086	10000186		21	235597	235663	10002777
22	63995	63995	10000204		22	238505	238574	10002846
23	66904	66904	10000223		23	241413	241485	10002916
24	69813	69813	10000243		24	244321	244395	10002987
25	72721	72722	10000264		25	247229	247306	10003058
26	75630	75631	10000285		26	250137	250217	10003130
27	78539	78540	10000308		27	253045	253128	10003203
28	81448	81450	10000332		28	255953	256038	10003277
29	84357	84359	10000357		29	258861	258949	10003352
30	87265	87268	10000381		30	261769	261859	10003428
31	90174	90177	10000407		31	264677	264770	10003505
32	93083	93086	10000433		32	267585	267681	10003582
33	95992	95995	10000461		33	270493	270592	10003660
34	98901	98904	10000489		34	273401	273503	10003739
35	101809	101814	10000518		35	276308	276414	10003819
36	104718	104723	10000548		36	279216	279325	10003900
37	107627	107632	10000579		37	282124	282237	10003982
38	110536	110541	10000611		38	285032	285148	10004065
39	113445	113450	10000643		39	287940	288059	10004148
40	116353	116360	10000677		40	290847	290970	10004232
41	119262	119269	10000711		41	293755	293882	10004317
42	122171	122178	10000746		42	296663	296794	10004403
43	125079	125088	10000782		43	299570	299705	10004490
44	127988	127997	10000819		44	302478	302617	10004578
45	130896	130906	10000857		45	305385	305528	10004666
46	133805	133816	10000895		46	308293	308439	10004755
47	136714	136725	10000934		47	311200	311351	10004845
48	139622	139635	10000975		48	314108	314262	10004926
49	142531	142544	10001016		49	317015	317174	10005028
50	145439	145454	10001058		50	319922	320085	10005122
51	148348	148363	10001100		51	322830	322997	10005216
52	151257	151273	10001144		52	325737	325909	10005310
53	154165	154182	10001188		53	328645	328821	10005405
54	157074	157092	10001233		54	331552	331733	10005501
55	159982	160001	10001280		55	334459	334645	10005598
56	162891	162911	10001327		56	337367	337558	10005696
57	165790	165820	10001375		57	340274	340470	10005795
58	168708	168730	10001423		58	343181	343382	10005894
59	171616	171640	10001473		59	346088	346295	10005994
60	174524	174550	10001524		60	348995	349207	10006095

4 Leren landmeten

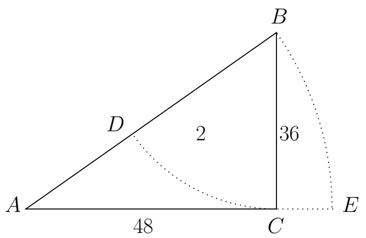
In hoofdstuk achttien en negentien van *Vanden Circkel* behandelt Van Ceulen een dertigtal opgaven waar de landmeters in zijn ogen hun voordeel mee zouden kunnen doen. In deze opgaven demonstreert Van Ceulen vooral het gebruik van de tabellen in verschillende meetkundige figuren. In hoofdstuk achttien zijn de figuren onder andere driehoeken en vierhoeken, oftewel figuren die worden ingesloten door enkel rechte lijnen. In hoofdstuk negentien gebruikt Van Ceulen voor zijn opgaven figuren die zijn ingesloten door rechten en cirkelbogen, zoals maanvormige stukken land.

Ik zal niet alle opgaven die Van Ceulen behandelt bespreken, maar ik zal een paar typerende opgaven uit zijn selectie lichten om zo een representatief beeld van de hoofdstukken te geven. Verder zal ik ook de opgaven bespreken die in het kader van mijn hoofdvraag opvallend zijn. Bij mijn bespreking zal ik, ook wat betreft de volgorde van behandeling van de opgaven, zoveel mogelijk Van Ceulen zelf aanhouden. Waar nodig geef ik een toelichting, nadat ik Van Ceulens werkwijze heb weergegeven. In het hoofdstuk hierna zal ik de opgaven vervolgens bespreken in het licht van mijn hoofdvraag, onder andere door de opgaven en werkwijze van Van Ceulen te vergelijken met opgaven en uitwerkingen uit enkele landmeetkundige werken uit de zestiende eeuw.

Hoofdstuk achttien begint met enkele basisopgaven, waarin Van Ceulen demonstreert hoe je bij een gegeven veelhoek zodanig cirkelbogen kunt kiezen dat je met de tabellen kunt werken. Opgave twee is een dergelijke opgave.

4.1 Hoofdstuk 18, opgave 2

Gegeven: De rechthoekige driehoek ABC, met $AC = 48$ en $BC = 36$ roeden.
Gevraagd: Hoe groot is AB en hoe groot zijn $\angle A$ en $\angle B$?
Antwoord: $AB = 60$ roeden, $\angle A = 36°52'11\frac{5}{8}''$ en $\angle B = 53°7'48\frac{3}{8}''$.



Van Ceulen geeft in zijn uitwerking een zeer duidelijke demonstratie van het gebruik van de in hoofdstuk zeventien gegeven tabellen. Door de vraag op twee verschillende manieren (d.w.z. met behulp van twee verschillende tabellen) op te lossen, toont hij bovendien "de netticheydt der Tafelen" aan, oftewel de correctheid van de tabellen.[27]

4.1.1 Uitwerking met behulp van de *Tafel Tangentium*

Allereerst lost Van Ceulen de opgave op door de Tangenstabel te gebruiken. In de figuur kiest hij BC als straal en trekt hij vanuit middelpunt B boog DC (die gelijk is aan $\angle B$), zodat $AC = \text{Tan}(DC)$.[28] De lengte van AC is bekend in roeden, maar niet in parten. Met behulp van het feit dat $BC = 36$ roeden $= 10000000$ parten (omdat BC gekozen is als straal), rekent Van Ceulen eenvoudig om dat $AC = 13333333\frac{1}{3}$ parten. Wanneer hij dit in de tabel opzoekt, volgt dat AC ligt tussen $53°7'$, wat overeenkomt met 13326821 parten en $53°8'$, wat overeenkomt met 13334899 parten. Met behulp van lineaire interpolatie vindt Van Ceulen vervolgens dat $\angle B = 53°7'48\frac{3}{8}''$ en $\angle A = 90° - \angle B = 36°52'11\frac{5}{8}''$.

[27] Van Ceulen (1596: fol.49v)

[28] Voor de duidelijkheid herhaal ik hier dat Van Ceulens Tangens niet dezelfde is als de moderne tangens. Van Ceulen vat de Sinus, Cosinus, Tangens en Secans zoals gezegd op als lijnstukken en niet als functies. Om een onderscheid met de moderne begrippen te maken, hanteer ik de hoofdletternotatie voor de goniometrische termen van Van Ceulen. Bovendien zal ik zowel notaties als Tan(CD) en Tan($\angle B$) gebruiken, waarbij CD staat voor boog CD in graden en ook $\angle B$ in graden gegeven is. Bij het afwisselen tussen de notaties volg ik zoveel mogelijk Van Ceulens werkwijze.

De zijde AB vindt Van Ceulen door de stelling van Pythagoras (EL.I:47) toe te passen in $\triangle ABC$. Hij geeft echter aan dat AB ook met behulp van de Secanstabel gevonden kan worden, immers $AB = \mathrm{Sec}(DC)$, oftewel $AB = \mathrm{Sec}(53°7'48\frac{3}{8}'')$. Opzoeken en lineair interpoleren geeft dat $AB = 16666667$ parten $= 60$ roeden.

4.1.2 Uitwerking met behulp van de *Tafel Sinuum*

Van Ceulen berekent vervolgens $\angle A$ en $\angle B$ nogmaals, maar dit keer met behulp van de Sinustabellen. Zo slaat hij twee vliegen in één klap: lezers raken vertrouwd met het werken met de tabellen en in dit specifieke geval geven de Sinustabel en de Tangenstabel dezelfde uitkomst, zodat de nauwkeurigheid van de tabellen aannemelijk wordt. Deze manier van werken is representatief voor de overige opgaven van hoofdstuk achttien. Van Ceulen werkt de opgave vaker op meerdere manieren uit, zodat hij voor verschillende situaties aantoont dat de tabellen dezelfde uitkomsten geven. Bijkomend voordeel is dat op deze manier Van Ceulen ook de juistheid van zijn eigen werkwijze demonstreert. Hijzelf legt echter de nadruk op het aantonen van de correctheid van de tabellen.

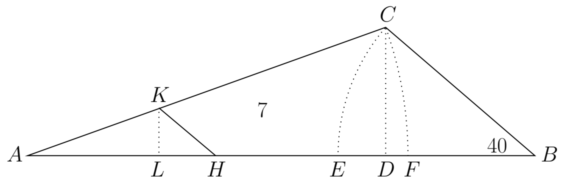
Om met de Sinustabel te kunnen werken, kiest Van Ceulen AB als straal en trekt hij vanuit middelpunt A de boog BE. Er geldt nu dat $BC = \mathrm{Sin}(\angle A)$ en $CA = \mathrm{Cos}(\angle A) = \mathrm{Sin}(\angle B)$. Van Ceulen rekent vervolgens met behulp van de bekende lengte van AB lijnstuk AC en BC om naar parten, waaruit volgt dat $AC = 8000000$ parten en $BC = 6000000$ parten. Opzoeken in de Sinustabel en interpoleren geeft dat $\angle A = 36°52'11\frac{5}{8}''$ en $\angle B = 53°7'48\frac{3}{8}''$, waarmee Van Ceulen op hetzelfde antwoord uitkomt als bij het gebruik van de Tangenstabel.

⋆

Het werken met de tabellen in driehoeken komt er dus op neer dat je een of meerdere lijnstukken op een handige manier als straal kiest, waarna je de gevraagde hoeken en lengtes kunt berekenen. Van Ceulen demonstreert dit principe, dat hij onder andere in opgave twee zeer duidelijk uiteenzet, in de eerste zes opgaven van hoofdstuk achttien. In opgave zeven demonstreert Van Ceulen een ander type vraag. In deze opgave gaat het erom een driehoek met een gegeven oppervlakte af te snijden van een grotere driehoek.

4.2 Hoofdstuk 18, opgave 7

Gegeven: De driehoek ABC, met $CB = 50$ roeden en $\angle ACB = 115°$. Bovendien is gegeven dat $\angle B = 40°$.[29]
Gevraagd: Een vierhoek met een oppervlakte van 1500 kwadraatroeden dat van de driehoek ABC met een lijn parallel aan CB is afgesneden.



4.2.1 Uitwerking

Allereerst geeft Van Ceulen aan hoe je de oppervlakte van $\triangle ABC$ kunt berekenen met behulp van de Sinustabellen uit hoofdstuk zeventien. Hiervoor kiest hij BC en AC als straal en trekt hij hiermee respectievelijk boog CE uit middelpunt B en boog CF uit middelpunt A. Bovendien trekt hij uit C de loodlijn CD. Bij straal BC geldt nu dat $CD = \mathrm{Sin}(CE) = \mathrm{Sin}(40°)$ en $DB = \mathrm{Cos}(CE) = \mathrm{Sin}(50°)$. Opzoeken

[29] Dit is niet gegeven in de oorspronkelijke opgave, maar Van Ceulen rekent hier wel mee. Bovendien staat deze hoekgrootte vermeld in de bijbehorende figuur.

in de Sinustabel en omrekenen geeft dat $CD \approx 32,13938$ roeden en $DB \approx 38,302225$ roeden. Bovendien geldt bij straal AC dat $CD = \mathrm{Sin}(CF) = \mathrm{Sin}(25°)$ en $AD = \mathrm{Cos}(CF) = \mathrm{Sin}(65°)$. Opzoeken en omrekenen, met behulp van de inmiddels bekende lengte (in roeden) van CD, geeft dat $AC \approx 76,04824$ roeden en $AD \approx 68,923113$ roeden. Basis AB van $\triangle ABC$ is daarom ongeveer 107,22534 roeden lang, zodat de oppervlakte van $\triangle ABC$ ongeveer 1723,078 kwadraatroeden is.

Van Ceulen trekt hier vervolgens de 1500 kwadraatroeden van het gevraagde vierkant vanaf, om te concluderen dat de resterende driehoek ($\triangle AHK$ met $KH \perp CB$) een oppervlakte moet hebben van 223,078 kwadraatroeden. Deze driehoek is gelijkvormig met $\triangle ABC$, zodat geldt dat $\frac{\mathrm{Opp}(ABC)}{\mathrm{Opp}(AHK)} = \frac{CB^2}{KH^2}$. Hieruit volgt dat $HK = \sqrt{323,66207} \approx 17,9906$ roeden. Met behulp van deze lengte en de gelijkvormigheid van $\triangle ABC$ en $\triangle AHK$ berekent Van Ceulen vervolgens dat $AH \approx 38,5809$ roeden en $AK \approx 27,36302$. Hierna doet Van Ceulen een opmerkelijke uitspraak. Hij geeft aan dat wanneer je op AC 27 roeden meet en op AB 38 roeden, je de punten K en H vindt waartussen je lijnstukKH kunt trekken dat "den begeren ghenoegh [doet]" waarmee hij de fracties achter de komma volledig verwaarloost.[30] Ik zal in hoofdstuk vijf terugkomen op deze opmerkelijke stap in Van Ceulens uitwerking

4.2.2 Van Ceulens antwoordcontrole

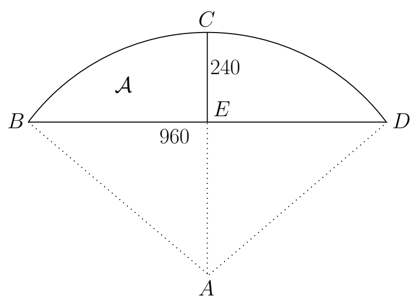
Van Ceulen bewijst ten slotte dat de ligging van KH juist is door met zijn gevonden (onafgeronde!) waarden te berekenen dat de geconstrueerde driehoek AHK inderdaad 223,078 kwadraatroeden groot is. Hij trekt hiervoor uit K de loodlijn KL op AH. Er geldt nu dat $\triangle KLH \cong \triangle CDB$, vanwege EL.VI:20. Hiermee berekent Van Ceulen dat $KL \approx 11,96414$ roeden. Wanneer je vervolgens KL vermenigvuldigt met de helft van basis AH, blijkt $\triangle AHK$ inderdaad een oppervlakte van 223,078 kwadraatroeden te hebben.

⋆

Opvallend aan opgave zeven is dat Van Ceulen op een vrij omslachtige manier de oppervlakte van $\triangle ABC$ berekent. Dat hij ook een methode kent om dit gemakkelijker te berekenen (namelijk met gebruik van de stelling van Heron) zal blijken uit latere opgaven. Hier zal ik bij de bespreking van opgave vier uit hoofdstuk negentien op terugkomen. Het is nu in elk geval duidelijk dat Van Ceulen ook dit type opgaven op kan lossen met behulp van de goniometrische tabellen. De rest van de opgaven uit hoofdstuk achttien zijn in feite variaties op opgave twee en opgave zeven. Zo demonstreert Van Ceulen in opgave tien hoe je een driehoek van een vijfhoek moet afsnijden en laat hij in opgave veertien zien hoe je hoeken en zijden in een vijhoek kunt berekenen met behulp van de tabellen. Omdat de basisprincipes echter al door opgave twee en zeven duidelijk zijn, zal ik de rest van de opgaven hier niet behandelen. Ik vervolg zodoende met enkele opgaven uit hoofdstuk negentien, te beginnen bij de opgave die onmisbaar is voor het begrijpen van de rest van het hoofdstuk: opgave één.

4.3 Hoofdstuk 19, opgave 1

Gegeven: Er is een stuk land dat ingesloten wordt door de rechte BD en cirkelboog BCD. Punt E ligt in het midden van lijnstuk BD. In de figuur geldt dat $BD = 960$ roeden en $CE = 240$ roeden.
Gevraagd: Hoe groot is het stuk land $BCDE$?
Antwoord: $161025,6296$ kwadraatroeden.



[30] Van Ceulen (1596: fol.51r).

4.3.1 Uitwerking

Om de vraag te beantwoorden zoekt Van Ceulen allereerst de diameter van de cirkel waar boog BCD een stuk van is. Hij gebruikt hiervoor EL.III:35. Deze stelling kun je toepassen op de rechte BED en de diameter door C en E, die loodrecht op BED staat en BED middendoor deelt in het punt E. Volgens de stelling geldt dat $BE \times ED = CE \times$ (diameter $-$ CE). Invullen van deze formule geeft dat de gezochte diameter van de cirkel gelijk is aan 1200 roeden. Van Ceulen vindt met behulp hiervan vervolgens dat de straal van de cirkel gelijk is aan 600 roeden en vindt voor EA een lengte van 360 roeden.

Van Ceulen berekent vervolgens de lengte van boog CD in roeden met behulp van de in hoofdstuk zeventien gegeven tabellen. Er geldt dat $ED = \mathrm{Sin}(CD)$ wanneer als straal AD wordt gekozen. Door middel van omrekenen, opzoeken en interpoleren vindt Van Ceulen dat boog $CD = 53°7'48'' = 53° + \frac{7}{60}' + \frac{48}{3600}'' \approx 53,13°$. In de opgave werkt Van Ceulen met de waarde 3,1415926 voor π, zodat hij voor de gehele cirkelomloop 3769,91112 roeden vindt en zodoende voor boog CD een lengte van 556,3760494 roeden berekent.

Om ten slotte de oppervlakte van het gegeven stuk land te bepalen, berekent Van Ceulen eerst de oppervlakte van figuur $ABCD$ door de gevonden lengte van boog CD te vermenigvuldigen met de halve diameter (een methode waar ik later op zal terugkomen). Hieruit volgt dat de oppervlakte van $ABCD$ gelijk is aan 33825,6296 kwadraatroeden.[31] Van deze oppervlakte trekt Van Ceulen de oppervlakte van $\triangle ABD$ af, die hij eenvoudig berekent met behulp van de bekende formule $\frac{1}{2} \times BD \times EA$, en welke oppervlakte 172800 kwadraatroeden groot is. Op deze manier vindt Van Ceulen het gewenste antwoord voor het land $BCDE$, namelijk 16025,6296 kwadraatroeden. Dit is minstens 134 kwadraatroeden minder dan wanneer je de berekening met de Archimedische bovengrens $\pi = \frac{1}{7}$ uitvoert, aldus Van Ceulen.

⋆

Bovenstaande opgave is niet voor niets de eerste opgave van het hoofdstuk; in deze opgave behandelt Van Ceulen de basistechniek van het berekenen van oppervlakten van stukken land die worden ingesloten door één rechte en een cirkelboog. Alhoewel de methode die Van Ceulen hier geeft niet veel afwijkt van de methode die tegenwoordig veel gebruikt wordt, verdient de manier van weergeven bij Van Ceulen toch wat extra aandacht. Afgezien van het feit dat tabellen tegenwoordig niet meer worden gebruikt, is Van Ceulens manier van het berekenen van het oppervlak van figuren als $ABCD$ in eerste instantie verrassend. Tegenwoordig zou je de oppervlakte van een dergelijke figuur bepalen door de oppervlakte van de hele cirkel uit te rekenen en vervolgens (met behulp van $\angle BAD$) het gevraagde deel van de oppervlakte te berekenen. Laat r de straal van de cirkel zijn, d de diameter en O de oppervlakte van de hele cirkel. Schematisch weergegeven geldt dan:

$O = \pi r^2 = \frac{1}{4}\pi d^2$
$\mathrm{Opp}(ABCD) = O \times \frac{\angle BAD}{2\pi} = \frac{1}{2}\frac{\pi d^2 \times \angle CAD}{2\pi} = \frac{\pi d^2 \times \angle CAD}{4\pi}$

Van Ceulens manier is echter als volgt schematisch weer te geven:

$\mathrm{Opp}(ABCD) = \mathrm{bg}(CD) \times \frac{1}{2} \times d$

Hierbij gebruikt van Ceulen de booglengte van CD in roeden. Dat de methodes op het zelfde neerkomen blijkt wanneer je bedenkt dat CD gelijk is aan de omtrek van de hele cirkel (c) vermenigvuldigd met $\frac{\angle CAD}{360}$:

$\mathrm{Opp}(ABCD) = \mathrm{bg}(CD) \times \frac{1}{2} \times d$
$\mathrm{Opp}(ABCD) = c \times \frac{\angle CAD}{2\pi} \times \frac{1}{2}d$
$\mathrm{Opp}(ABCD) = \frac{\pi d^2 \times \angle CAD}{4\pi}$

De manier van Van Ceulen komt dus precies overeen met de ons bekende methode, maar is zeer handig

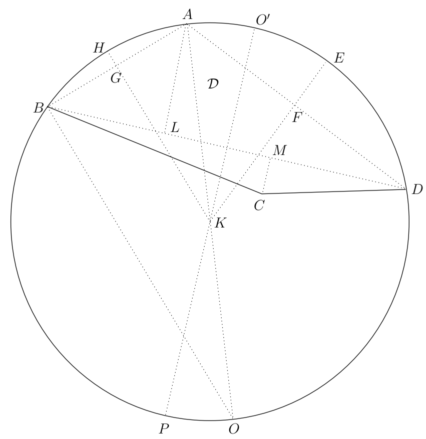
[31] In het oorspronkelijke werk staat hier een verkeerde waarde vermeld, namelijk de waarde van het uiteindelijke stuk land (161025,6296). Dat dit een drukfout is, blijkt uit het feit dat Van Ceulen met de juiste waarde heeft verder gerekend.

wanneer enkel de booglengte in roeden en de diameter bekend zijn. In de literatuur uit de zestiende eeuw is dit bovendien de standaardmanier voor het berekenen van de oppervlakte van figuren als $ABCD$

In opgave twee en drie behandelt Van Ceulen nog twee basistechnieken. Deze berusten niet op het gebruik van de tabellen, maar op het werken met verschillende verhoudingen binnen cirkels. Omdat deze opgaven niet noodzakelijk zijn voor de rest van de opgaven in het hoofdstuk en ook geen spannende nieuwe inzichten bevatten, zal ik deze hier niet behandelen. Vanaf opgave vier worden de stukken land waarmee Van Ceulen rekent ingewikkelder van vorm en daarmee wordt de berekening van de oppervlakte interessanter.

4.4 Hoofdstuk 19, opgave 4

Gegeven: Het stuk land $BAEDC$ wordt ingesloten door de rechten BC en CD en cirkelboog $BAED$. Er geldt dat $BC = 62\frac{2}{3}$ roeden, $CD = 64$ roeden, koorde $BA = 52$ roeden en koorde $DA = 96$ roeden. Punt E ligt midden op boog AD en punt F ligt in het midden van koorde DA. Er geldt dat lijnstuk EF, de loodlijn op koorde AD vanuit het punt E, een lengte heeft van 20 roeden.
Gevraagd: Hoe groot is het stuk land $BAEDC$?
Antwoord: $4412,44152$ kwadraatroeden.



4.4.1 Uitwerking

Op dezelfde manier als in opgave één zoekt Van Ceulen eerst de diameter behorende bij de cirkel waar de cirkelboog BAD een deel van is. Ditmaal is het geheel aan de lezer zelf om uit te zoeken welke koorden voor deze berekening gebruikt kunnen worden. Van Ceulen volstaat met het geven van de waarde van de diameter. Handig is om de koorde AD en de diameter die door de punten E en F gaat in de berekening te gebruiken, zodat met EL.III:35 volgt dat de gezochte diameter een lengte heeft van $135\frac{1}{5}$ roeden.

Vervolgens berekent Van Ceulen met behulp van de stelling van Pythagoras (EL.I:47) de lijnstukken GK, HG en KF, waarbij K het middelpunt van de gegeven cirkel is en G in het midden van koorde AB ligt.[32] In $\triangle AGK$ geldt: $GK^2 = AK^2 - AG^2$, waaruit volgt dat $GK = 62\frac{2}{5}$ roeden. Verder geldt dat $HG = HK - GK = 5\frac{1}{5}$ roeden en $KF = EK - EF = 47\frac{3}{5}$ roeden. Van Ceulen heeft deze berekende lengtes later in zijn uitwerking nodig.

Van Ceulen vervolgt zijn uitwerking echter met het berekenen van de oppervlakte van vierhoek $BADC$. Deze figuur is samengesteld uit $\triangle BAD$ en $\triangle BCD$. Om de oppervlakten van deze driehoeken te kunnen berekenen is allereerst de lengte van koorde BD nodig. Hiervoor trekt Van Ceulen vanuit $\angle BAD$ de loodlijn AL op koorde BD. Om BD te berekenen verwijst Van Ceulen vervolgens naar EL.III:21 en EL.I:47. Hierna concludeert Van Ceulen dat $AO : BA = AD : AL$, waarbij met AO de diameter van

[32] Van Ceulen geeft niet expliciet aan dat GK een loodlijn is op AB die AB middendoor deelt. Dit wordt echter wel in de figuur gesuggereerd en is een noodzakelijke aanname in de opgave.

de cirkel bedoeld wordt. [33] Van Ceulen licht niet toe waarom deze vergelijking geldt, maar met behulp van de gegeven loodlijn, het feit dat $\angle BOA = \angle LDA$ en de door Van Ceulen onvermeld gelaten stelling van Thales is vrij gemakkelijk te bewijzen dat $\triangle ABO \simeq \triangle ALD$, zodat de genoemde vergelijking inderdaad geldt. Uit deze vergelijking berekent Van Ceulen dat $AL = 36\frac{12}{13}$ roeden,[34] waarmee hij vervolgens $BL = 36\frac{8}{13}$ roeden[35] en $LD = 88\frac{8}{13}$ roeden vindt. Optellen geeft dat $BD = 125\frac{3}{13}$ roeden.

Nu de zijden van de twee driehoeken ($\triangle BAD$ en $\triangle BCD$) die samen de vierhoek $ABCD$ vormen bekend zijn, komt het erop aan de juiste oppervlakte van de driehoeken te vinden. Van Ceulen wijst er in dit geval op dat er voor het bepalen van de oppervlakte van driehoeken veel verkeerde methoden in omloop zijn, waarvoor hij landmeters al vaak heeft gewaarschuwd. Van Ceulen geeft daarom op dit punt in de tekst twee "waerachtighe Regulen" voor het bepalen van de oppervlakte van driehoeken.[36] De eerste methode gaat als volgt:

1. tel de zijden van de driehoek bij elkaar op en neem de helft van deze som;
2. trek elke zijde afzonderlijk af van de helft van de bij stap 1 berekende som;
3. vermenigvuldig de drie verkregen resten met de helft van de som en neem de wortel hieruit.

Deze methode staat bekend als de stelling van Heron, waarop ik later zal terugkomen. De methode is vooral handig als alle zijden van de driehoek bekend zijn, terwijl de hoogte van de driehoek onbekend is. Het is opvallend dat Van Ceulen deze methode niet al gebruikte in de zevende opgave van hoofdstuk achttien. De tweede methode die Van Ceulen noemt zal studenten van tegenwoordig iets bekender in de oren klinken en werd door Van Ceulen onder andere al gebruikt in opgave zeven uit hoofdstuk achttien:

1. trek uit de stompe hoek een loodlijn op de zijde tegenover deze hoek;
2. vermenigvuldig de helft van deze loodlijn met de zijde tegenover de stompe hoek.

Deze methode komt neer op de bekende formule Opp($\triangle$) = $\frac{1}{2}\times$ hoogte $\times$ basis.

Na deze theoretische uitweiding, past Van Ceulen beide methoden toe. In $\triangle BAD$ geldt dat $AL \perp BD$, met $AL = 36\frac{12}{13}$. Hieruit volgt met behulp van de tweede methode dat $\text{Opp}(\triangle BAD) = 2311\frac{161}{169}$ kwadraatroeden. In $\triangle BCD$ is de hoogte onbekend, dus gebruikt Van Ceulen de eerstgenoemde methode om te vinden dat $\text{Opp}(\triangle BCD) \approx 595{,}3879261$ kwadraatroeden. Optellen geeft vervolgens dat de oppervlakte van vierhoek $BADC \approx 2907{,}340589$ kwadraatroeden.

Nu de oppervlakte van de vierhoek $BADC$ bekend is, berekent Van Ceulen de lengte van de twee bogen ED en AH. De precieze berekening geeft Van Ceulen niet, maar de oplettende lezer is duidelijk dat de booglengten met behulp van de tabellen berekend kunnen worden. In figuur $KFED$ geldt dat, wanneer je KD als straal neemt, $FD = \text{Sin}(ED)$ met $FD = \frac{1}{2}AD = 48$ roeden. Middels de bekende omreken-, opzoek- en interpolatieprocedures vind je, net als Van Ceulen, dat $ED = 45°14'23''$.

Voor de berekening van AH is het handig om figuur $KGHA$ te beschouwen. Wanneer je in deze figuur AK als straal neemt, geldt dat $AG = \text{Sin}(AH)$, met $AG = \frac{1}{2}AB = 26$ roeden. Omrekenen en opzoeken geeft dat $AH = 22°37'11\frac{1}{2}''$.

Beide cirkelbogen kun je in roeden omrekenen met behulp van Van Ceulens waarde voor π.[37] Er geldt dat de omtrek van de hele cirkel met middelpunt K en straal KD gelijk is aan ongeveer $424{,}743$ roeden (afhankelijk van je gekozen waarde voor π), zodat boog $ED \approx 53{,}37575$ roeden en boog $AH \approx 26{,}687875$

[33] In de oorspronkelijke figuur is er sprake van twee verschillende punten O. Het tweede punt O dat nog ter sprake zal komen, zal ik daarom aanduiden met O'.

[34] In het origineel staat dat $AL = 36\frac{2}{13}$ roeden, maar dat dit een drukfout is blijkt uit het feit dat Van Ceulen wel met de juiste waarde voor AL doorrekent.

[35] Hier komen we weer een drukfout tegen in het origineel, namelijk $BL = 38\frac{8}{13}$. Van Ceulen rekent echter wederom door met de juiste waarde van BL.

[36] Van Ceulen (1596: fol.55r)

[37] $3{,}14159265358979323846 < \pi < 3{,}14159265358979323847$, Van Ceulen (1596: Voor-reden). Van Ceulen geeft echter in de opgave niet aan met hoeveel significante cijfers hij precies rekent.

roeden.

Met behulp van opgave één volgt nu dat Opp$(AEDK) = ED \times \frac{1}{2}\times$ diameter $\approx 3608,20072$ kwadraatroeden. Wanneer je hier Opp$(AFKD) = KF \times FD = 2284\frac{4}{5}$ kwadraatroeden van aftrekt, volgt dat Opp$(AEDF) \approx 1323,40072$ kwadraatroeden.

Op dezelfde manier geldt dat Opp$(BHAK) = AH \times \frac{1}{2}\times$ diameter $\approx 1804,100361$ kwadraatroeden. Wanneer je hier Opp$(BGAK) = AG \times GK = 1622\frac{2}{5}$ kwadraatroeden van aftrekt, volgt dat Opp$(BHAG) \approx 181,700361$ kwadraatroeden.

De uiteindelijke grootte van het gegeven stuk land is zodoende gelijk aan Opp$(BHAG)+$Opp$(AEDF)+$ Opp$(BADC) \approx 4412,44167$ kwadraatroeden.[38]

4.4.2 Twee andere methoden

Van Ceulen geeft vervolgens twee andere manieren om de oppervlakte van het gevraagde stuk land te berekenen. De basisstappen zijn voor alle methoden hetzelfde. In de tweede manier die Van Ceulen geeft, wordt de in de eerste methode berekende lengte van BD als uitgangspunt genomen. Van Ceulen construeert op BD het punt M, zodat $MD = \frac{1}{2}BD$ waaruit volgt dat $MD = 62\frac{8}{13}$ roeden.[39] Wanneer je KD als straal neemt, geldt dat $MD = \text{Sin}(O'D)$.[40] Omrekenen en opzoeken geeft dat boog $O'D = 67°51'34\frac{1}{2}''$, oftewel ongeveer 80,0636 roeden.[41]

Met behulp van opgave één kun je nu voor het cirkeldeel $KDO'B$ een oppervlakte van ongeveer 5412,301 kwadraatroeden vinden. Vervolgens geeft Van Ceulen aan dat de lengte van de loodlijn MK gelijk is aan $25\frac{31}{65}$ roeden. Alhoewel hij dit niet expliciet toelicht, kun je deze lengte eenvoudig vinden met behulp van de stelling van Pythagoras in $\triangle MBK$. Zo volgt dat Opp$(KBD) \approx 1595,2473373$ kwadraatroeden. Met behulp van de in de eerste methode berekende oppervlakte van $\triangle BCD$, vindt Van Ceulen vervolgens Opp$(BKCD) =$ Opp$(KBD) -$ Opp$(BCD) \approx 999,8594112$ kwadraatroeden. Wanneer je dit van oppervlakte $KDO'B$ aftrekt, vind je dat de uiteindelijke grootte van het gevraagde stuk land ongeveer 4412,441673 kwadraatroeden is.

Zoals gezegd geeft Van Ceulen hierna nog een andere methode om de grootte van het land te berekenen. Deze methode bouwt voort op zijn tweede methode. Allereerst trekt hij van de halve omloop $O'PD$ van de cirkel de boog $O'D$ af, welke lengte in de vorige methode gevonden is. Er geldt dat $PD = O'PD - O'D = 112°8'25\frac{1}{2}'' \approx 132,30804$ roeden. Deze lengte vermenigvuldigd met de halve diameter geeft Opp$(DPBK) \approx 8944,023362$ kwadraatroeden.[42] Van Ceulen telt hier vervolgens de in de tweede methode berekende Opp$(CBKD)$ bij op en verkrijgt de oppervlakte van het cirkeldeel $PBCD$. De oppervlakte van het gevraagde stuk land is ten slotte de oppervlakte van de gehele cirkel minus de oppervlakte van $PBCD$, zodat Opp$(BCDO) \approx 4412,44167$ kwadraatroeden.

4.4.3 De stelling van Heron

Van Ceulen geeft in zijn uitwerking twee verschillende manieren om de oppervlakte van een driehoek te berekenen. De eerste methode die hij gebruikt staat zoals gezegd ook wel bekend als de stelling van

[38] Deze waarden komen bijna overeen met de waarden die Van Ceulen voor de oppervlakten geeft. Een verklaring voor het verschil is het feit dat Van Ceulen de berekeningen in het geheel niet weergeeft, waardoor het niet duidelijk is welke waarde hij exact voor π neemt.

[39] In de originele tekst wordt dit lijnstuk AD genoemd. Dit klopt echter niet met de bijbehorende figuur. In de lijst met drukfouten die aan het eind van het oorspronkelijke boek is bijgevoegd wordt aangegeven dat de letter A inderdaad onjuist is. Hier wordt echter de letter A vervangen door de letter N, wat nog steeds niet met de figuur overeenkomt.

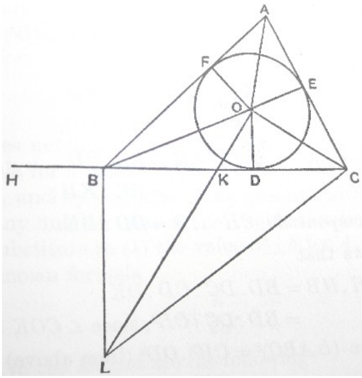
[40] In de oorspronkelijke figuur gebruikt Van Ceulen de letter O. Aangezien in de eerste methode echter ook al een punt O is gebruikt dat op een geheel andere plek op de cirkel ligt, noem ik het punt dat Van Ceulen hier bedoelt en dat op de cirkelboog BAD ligt, O'.

[41] Afgezien van het feit dat we hier te maken hebben met een drukfout (in de noemer is een 0 te weinig gebruikt).

[42] Dit is vreemd genoeg niet geheel dezelfde waarde als waar Van Ceulen op uitkomt. Dit zou kunnen liggen aan het feit dat hij een andere waarde voor π heeft gebruikt, of het betreft wellicht wederom een drukfout waarbij in de noemer een 0 te weinig is gebruikt.

Heron.[43] Omdat deze methode tegenwoordig niet meer zo bekend is als in de tijd van Van Ceulen, zal ik in deze paragraaf wat dieper op Herons stelling (en zijn bewijs daarvoor) ingaan.

Heron van Alexandrië was een Griekse wiskundige die werken heeft geschreven over (land)meetkunde en mechanica. Wanneer hij precies leefde is niet geheel duidelijk, maar dit moet in elk geval geweest zijn tussen 150 voor Christus en 250 na Christus. Zijn meest theoretische werk is de *Metrica*, waarin onder andere een bewijs van de genoemde stelling te vinden is. Deze stelling is in moderne formulevorm als volgt weer te geven: $\text{Opp}(\triangle ABC) = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$, waarin a, b, c de zijden zijn van $\triangle ABC$ en waarin $s = \frac{1}{2}(a+b+c)$. Het bewijs geeft Heron in boek I van de *Metrica* als volgt. Laat $\triangle ABC$ en a, b en c gegeven zijn. Construeer in $\triangle ABC$ de ingeschreven cirkel DEF met middelpunt O.



Er geldt:

$BC \times OD = 2 \times \text{Opp}(\triangle BOC)$
$CA \times OE = 2 \times \text{Opp}(\triangle AOC)$
$AB \times OF = 2 \times \text{Opp}(\triangle AOB)$

Hieruit volgt (door optelling) dat $(a+b+c) \times OD = 2 \times \text{Opp}(\triangle ABC)$. Verleng vervolgens CB tot CH, met $BH = AF$. Omdat $AE = AF$, $BF = BD$ en $CE = CD$, volgt $CH = BC + AF = \frac{1}{2}(a+b+c) = s$, zodat geldt: $CH \times OD = \text{Opp}(\triangle ABC)$ en dus $CH^2 \times OD^2 = \text{Opp}(\triangle ABC)^2$.

Construeer vervolgens $\triangle OCL$, met L het snijpunt van de loodlijnen in O op OC en in B op BC en zij K het snijpunt van OL met CH. Omdat $\angle COL = \angle CBL = 90°$, geldt dat $COBL$ een koordenvierhoek is, zodat $\angle COB + \angle CLB = 180°$. In de figuur geldt echter ook dat $\angle COB + \angle AOF = \angle AOC + \angle BOF$, terwijl deze vier hoeken samen gelijk zijn aan $360°$. Hieruit volgt dat $\angle COB + \angle AOF = 180°$, zodat $\angle AOF = \angle CLB$. Omdat $\triangle AOF$ en $\triangle CLB$ zodoende gelijkvormig zijn, geldt:

$BC : BL = FA : FO = BH : OD$ zodat:
$BC : BH = BL : OD = BK : KD$ (immers: $\triangle BKL \simeq \triangle DKO$) en zodoende geldt:
$(BC + BH) : BH = (BK + DK) : KD$, oftewel $CH : BH = BD : KD$

Hieruit kun je afleiden dat: $\frac{CH^2}{CH \times BH} = \frac{BD \times CD}{DK \times CD} = \frac{BD \times CD}{OD^2}$.[44] Eerder zagen we dat $\text{Opp}(\triangle ABC)^2 = CH^2 \times OD^2$, zodat nu volgt dat $\text{Opp}(\triangle ABC)^2 = BD \times CD \times CH \times HB = (s-c)(s-a)s(s-b)$, waarmee de stelling bewezen is.

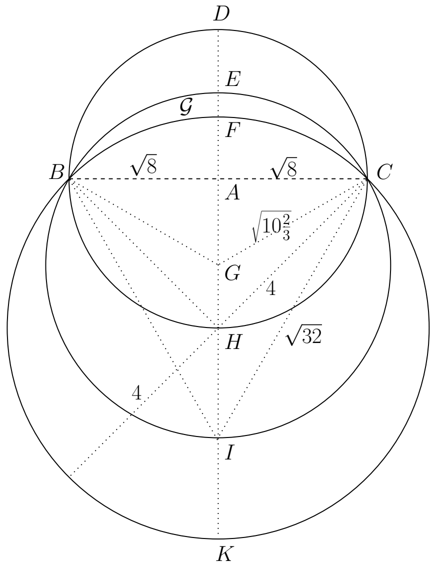
Q.E.D.

Na opgave vier geeft Van Ceulen in opgave vijf en zes twee variaties op opgave vier, waarbij hij telkens de methode van opgave vier en de methode van opgave één combineert. Deze twee opgaven zal ik daarom niet bespreken. In opgave zeven behandelt Van Ceulen een opgave over een maanvormig stuk land. Alhoewel hij in zijn uitwerking opvallend genoeg geen gebruik maakt van de tabellen, gebruikt Van Ceulen technieken die van belang zijn om de rest van de opgaven over maanvormige stukken land te begrijpen.

[43] Voor informatie over Heron, de stelling en het bewijs, zie: Heath (1931: 415 - 422).
[44] Immers: OD is de middenproportionaal van de rechthoekige $\triangle KOC$, zodat geldt dat $KD \times CD = OD^2$

4.5 Hoofdstuk 19, opgave 7

Gegeven: Het stuk land $BDCF$ wordt ingesloten door cirkelbogen BDC (een deel van de hele cirkel $BDCH$) en BFC (een deel van de hele cirkel $BFCK$ met middelpunt H) en wordt bovendien in twee ongelijke delen verdeeld door cirkelboog BEC (een deel van de hele cirkel $BECI$).[45] Er geldt: $BC = \sqrt{32}$, $BDC = \frac{1}{2}\times$ omtrek($BDCH$), $BFC = \frac{1}{4}\times$ omtrek($BFCK$), $BEC = \frac{1}{3}\times$ omtrek($BECI$)
Gevraagd: Wat is de oppervlakte van de maan $BDCF$? En wat zijn de oppervlakten van de manen $BDCE$ en $BECF$?
Antwoord: De oppervlakte van de gehele maan $BDCF$ is 8 kwadraatroeden, de oppervlakte van $BDCE$ is 6,01506555 kwadraatroeden en de oppervlakte van $BECF$ is 1,98493445 kwadraatroeden.



4.5.1 Uitwerking

Van Ceulen begint met een aantal uitspraken over gelijkvormigheid en verhoudingen in cirkels die nodig zijn voor het beantwoorden van de vraag, waarbij hij EL.VI:19, EL.VI:20 en EL.XII:2 aanhaalt. Met behulp van deze stellingen is het beantwoorden van de vraag volgens Van Ceulen vrij gemakkelijk. Hij geeft bij de uitwerking van deze opgave dan ook vrijwel geen berekeningen, al geeft hij wel aan in welke volgorde hij te werk gaat. Hierbij geeft hij enkel tussentijdse resultaten en het eindantwoord.

Allereerst zoekt hij, met behulp van verschillende verhoudingen die de drie gegeven cirkels tegen elkaar hebben, de oppervlakte van de grootste cirkel $BFCK$ met middelpunt H. Van Ceulen stelt dat de diameter van deze cirkel gelijk is aan 8 roeden, maar licht dit niet toe. Dat dit inderdaad klopt is als volgt in te zien: de straal van de kleinste cirkel is gelijk aan $\frac{1}{2} \times \sqrt{32}$, wat gegeven is. Bovendien is bekend dat de koorde BC van lengte $\sqrt{32}$ een cirkelboog BFC van de cirkel $BFCK$ afsnijdt ter lengte van een kwart van de gehele omloop van $BFCK$. Wanneer je nu het cirkeldeel $HAFC$ bekijkt en HC als straal neemt, dan geldt: Sin(bg(FC)) $= AC$, waarbij $AC = \frac{1}{2} \times \sqrt{32}$ roeden en bg(FC) $= \frac{1}{8}$ omtrek $BFCK$. Hieruit volgt dat $HC = 4$ roeden, zodat de diameter van de grootste cirkel inderdaad 8 roeden lang is. De oppervlakte van de grote cirkel is nu eenvoudig uit te rekenen en is ongeveer 50,2654825 kwadraatroeden.

Met behulp van de verhoudingen tussen het kwadraat van de diameters van de drie cirkels berekent Van Ceulen de oppervlakten van cirkels $BDCH$ en $BECI$. Hoe hij deze verhoudingen vindt, geeft hij niet aan, maar deze zijn eenvoudig te vinden. De verhouding tussen de diameterkwadraten van de kleinste en grootste cirkel is door het voorgaande bekend, namelijk: $\sqrt{32}^2 : 8^2$, oftewel 1 : 2. Op eenzelfde manier als bij de grote cirkel kun je voor de diameter van de middelste cirkel de waarde van $\frac{\sqrt{128}}{\sqrt{3}}$ vinden, waaruit

[45] Zoals vaker in *Vanden Circkel* worden niet alle gegevens expliciet door Van Ceulen genoemd, maar zijn ze af te leiden uit de bijbehorende figuur.

blijkt dat de verhouding tussen de diameterkwadraten van de middelste en de grootste cirkel gelijk is aan 2 : 3. Aangezien deze verhoudingen overeenkomen met de verhoudingen tussen de oppervlaktes van de cirkels (EL.XII:2), geldt dat de oppervlakte van de kleinste cirkel gelijk is aan $\frac{1}{2}$ keer de oppervlakte van de grootste cirkel, oftewel 25,1327412 kwadraatroeden. Ook geldt dat de oppervlakte van de middelste cirkel gelijk is aan $\frac{2}{3}$ keer de oppervlakte van de grootste cirkel, oftewel 33,5103216 kwadraatroeden.

Vervolgens concentreert Van Ceulen zich op het berekenen van de oppervlakte van de maan $BDCF$. Hiervoor merkt hij allereerst op dat er als gevolg van de bestaande verhoudingen in de figuur geldt dat de oppervlakte van cirkeldeel $BFCH$ (een kwart van de grootste cirkel $BFCK$) gelijk is aan de helft van de kleinste cirkel, oftewel gelijk is aan $BDCA$. Van Ceulen merkt op dat wanneer je van deze beide stukken het gemeenschappelijke cirkeldeel $BFCA$ afhaalt, je de gevraagde maan $BDCF$ overhoudt. Bovendien blijkt hieruit dat de gevraagde maan in oppervlakte gelijk is aan $\triangle BHC$, zodat $\text{Opp}(BDCF) = \frac{1}{2} \times BC \times AH = 8$ kwadraatroeden.

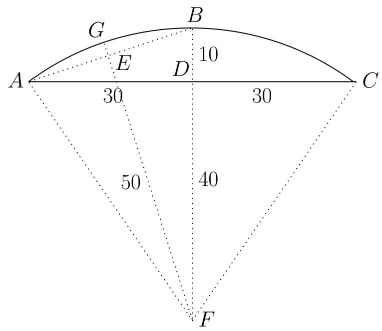
In de opgave is ook gevraagd de beide ongelijke delen van de maan te bepalen die zijn verkregen door de maan te doorsnijden met cirkelboog BEC. Hiervoor berekent Van Ceulen eerst dat de oppervlakte van $BFCA = \text{Opp}(BDCA) - \text{Opp}(BDCF) \approx 4,5663706$ kwadraatroeden. Vervolgens gebruikt hij dat $\text{Opp}(BECA) = \frac{1}{3}\text{Opp}(\text{cirkel } BECI) - \text{Opp}(\triangle BGC)$. Van Ceulen geeft niet aan hoe je de oppervlakte van $\triangle BGC$ kunt berekenen, maar basis BC is in de opgave gegeven en hoogte AG kun je vinden middels bovengenoemde proporties en de stelling van Pythagoras in $\triangle AGC$. Hieruit volgt dat $\text{Opp}(BGC) = \sqrt{21\frac{1}{3}}$ kwadraatroeden. De oppervlakte van $BECA$ is zodoende ongeveer gelijk aan 6,551305046 kwadraatroeden. De oppervlakte van $BECF$ berekent Van Ceulen ten slotte door $\text{Opp}(BFCA)$ van $\text{Opp}(BECA)$ af te trekken, waaruit volgt dat $\text{Opp}(BECF) \approx 1,98493445$ kwadraatroeden. Omdat de gehele maan een oppervlakte heeft van 8 kwadraatroeden, volgt hieruit dat $\text{Opp}(BDCE) \approx 6,01506555$ kwadraatroeden.

⋆

Het is opvallend dat waar Van Ceulen in de vorige opgaven zich sterk concentreerde op het toepassen van de goniometrische tabellen, hij hier voornamelijk ingaat op het gebruik van verhoudingen in gelijkvormige figuren. De figuren die hij in deze opgave gebruikt zijn dan ook mooi in verhouding. Opgave acht en negen die Van Ceulen geeft zijn variaties op opgave zeven die ook weer gebruik maken van verhoudingen. Van Ceulen geeft hiervan geen uitwerking, al geeft hij wel de antwoorden. Ik zal deze opgaven hier dan ook niet behandelen. Opgave tien is echter interessant, omdat Van Ceulen hier een van zijn gebruikte methodes afzet tegen een methode die hij in een ander boek over landmeetkunde is tegengekomen. In opgave tien maakt Van Ceulen geen gebruik van verhoudingen en grijpt hij terug op de eerste opgave van dit hoofdstuk. De opgave lijkt daarom wat vreemd geplaatst na de opgave zeven tot en met negen. Het lijkt er echter op alsof Van Ceulen in de eerste opgaven al zijn basistechnieken uiteen heeft gezet en die vervolgens vergelijkt met methoden uit andere boeken. Aangezien de benodigde basistechnieken in de zojuist behandelde opgaven gedemonstreerd zijn, is het interessant om te kijken welke vergelijkingen Van Ceulen maakt tussen zijn eigen methode en andere in omloop zijnde methoden.

4.6 Hoofdstuk 19, opgave 10

Gegeven: Het stuk land $ABCD$ wordt ingesloten door de rechte AC, met middelpunt D, en cirkelboog ABC. Er geldt dat boog $ABC = 66$ roeden, koorde $AC = 60$ roeden en $BD = 10$ roeden.[46]
Gevraagd: Hoe groot is het stuk land $ABCD$?



Van Ceulen geeft aan dat deze vraag hem is gesteld door de "welgeleerden eñ ervaren Meester" Eduwaert Leon die het hem toonde in een gedrukt boek.[47] Alhoewel Van Ceulen de titel van het boek niet noemt, evenmin als de auteur, blijkt het hier te gaan om het boek *Von Feldmessen, nach der Geometrei* van Andreas Helmreich, rekenmeester en 'visierer' (iemand die de vlakte of rechtlijnigheid peilt van stukken land) uit Halle in Saksen. Het boek is gedrukt in 1591 in Leipzig. De opgave waarnaar Van Ceulen verwijst is opgave veertien uit het zesde deel van *Von Feldmessen.* In *Vanden Circkel* geeft Van Ceulen eerst zijn eigen methode aan, waarna hij de methode uit *Von Feldmessen* uiteenzet. Zo laat hij zien dat zijn eigen methode zowel sneller als nauwkeuriger is. Bij deze uiteenzetting geeft hij overigens aan dat het verschil in uitkomst (Van Ceulen vindt 46 kwadraatroeden minder voor de oppervlakte van het stuk land) niet te wijten is aan de eventuele onkunde van de auteur maar aan het gebruik van verkeerde tabellen en het op een onnauwkeurige manier worteltrekken. Andreas Helmreich treft zodoende geen blaam volgens Van Ceulen, voor wie de mensen die onjuiste tabellen in omloop brengen de echte boosdoeners zijn.

4.6.1 Het bepalen van de diameter op de manier van Van Ceulen

Allereerst zoekt Van Ceulen op zijn eigen wijze een handige cirkel waarin hij zijn tabellen kan toepassen. Laat dit de cirkel zijn met middelpunt F en straal $AF = CF$. Op eenzelfde manier als in opgave één past Van Ceulen EL.III:35 vervolgens toe op de rechte AC en de diameter door punten B en D. Hieruit volgt dat de diameter van de cirkel gelijk is aan 100 roeden, zodat de halve diameter BF gelijk is aan 50 roeden en DF gelijk is aan $50 - 10 = 40$ roeden.

4.6.2 Het bepalen van de diameter op de manier van Helmreich

Van Ceulen demonstreert vervolgens de methode om de diameter van de cirkel te vinden uit *Von Feldmessen*, welke iets omslachtiger is. Allereerst wordt in *Von Feldmessen* de waarde van AB berekend met behulp van de stelling van Pythagoras in $\triangle ABD$, waaruit volgt dat $AB = \sqrt{1000}$ roeden. In *Von Feldmessen* wordt de lengte van AB zodoende vastgesteld op ongeveer $31\frac{1}{2}$ roeden. Van Ceulen geeft echter aan dat $31,6227766 < \sqrt{1000} < 31,6227767$ en hij rekent door met $AB = 31,6227766$ roeden. Helmreich wil uiteindelijk de lengte van BF berekenen en daarvoor heeft hij allereerst de grootte (in graden) van $\angle DAB = \angle BFE$ nodig, waarbij punt E in het mideden van koorde AB ligt. Hij neemt AB als straal zodat geldt dat $DA = \text{Sin}(\angle ABD)$. Omrekenen en opzoeken in Van Ceulens tabellen geeft dat $\angle ABD = 71°33'54''$, zodat $\angle DAB = 90° - \angle ABD = 18°26'6''$. Vervolgens neemt Helmreich BF als straal zodat $\frac{1}{2}AB = AE = \text{Sin}(\angle DAB)$. Omrekenen en opzoeken geeft ten slotte bij Van Ceulen dat $BF = 50$ roeden, tegenover een lengte van $51\frac{2}{3}$ roeden bij Helmreich.[48]

[46]In de originele tekst staat een drukfout, namelijk dat $AC = 30$ roeden. Dit is echter niet de waarde waar Van Ceulen mee rekent, noch de waarde die in de oorspronkelijke bijbehorende figuur staat vermeld, noch de waarde uit het boek waarin Van Ceulen deze opgave heeft gevonden. De correcte waarde voor AC is 60 roeden.

[47]Van Ceulen (1596: fol.56r)

[48]Deze afwijkende waarde is volledig te wijten aan het gebruik van minder nauwkeurige tabellen door Helmreich (die een tabel gebruikt met als straal voor de basiscirkel 100.000), waarbij deze bovendien niet tot op de seconde nauwkeurig

4.6.3 Het bepalen van de gevraagde oppervlakte $ABCD$

Op dezelfde wijze als Van Ceulen in opgave één gebruikt, berekenen zowel Helmreich als Van Ceulen eerst de oppervlakte van cirkeldeel $FABC$ voor $\pi = 3\frac{1}{7}$. Hierbij komt Van Ceulen uit op $1609\frac{17}{42}$ kwadraatroeden. De oppervlakte van $\triangle FAC$ is gemakkelijk te berekenen en is gelijk aan 1200 kwadraatroeden. Van Ceulen trekt deze oppervlakte af van Opp($FABC$) en houdt voor de oppervlakte van $ABCD$ $409\frac{17}{42}$ kwadraatroeden over, tegenover Helmreich die door het doorrekenen met zijn onnauwkeurige waarden uitkomt op een oppervlakte van 455 kwadraatroeden. Ten slotte geeft Van Ceulen aan dat wanneer je de berekening uitvoert met zijn nauwkeurigere waarde voor π, je op een oppervlakte voor $ABCD$ uitkomt van 408,757237 kwadraatroeden.[49]

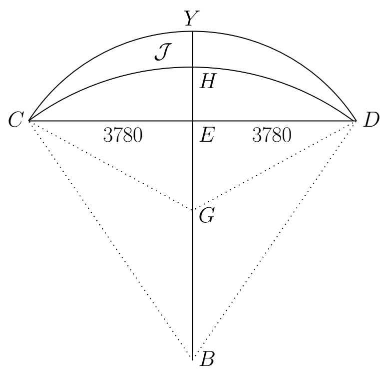
⋆

Opvallend aan deze opgave, zeker door de vergelijking met opgave één, is dat opgave tien redundante gegevens bevat. Het feit dat de boog ABC 66 roeden lang is wordt door zowel Helmreich als Van Ceulen niet gebruikt (informatie over de booglengte wordt in de vergelijkbare opgave 1 van hoofdstuk 19 bijvoorbeeld niet gegeven). Bovendien is de lengte van boog ABC niet exact gelijk aan 66 roeden. Van Ceulen merkt dan ook terloops op dat de "ware ende gherechte lengde des Booghs" gelijk is aan twee keer booglengte AB, oftewel gelijk is aan ongeveer $2 \times 32\frac{79}{420} = 64\frac{158}{420}$.[50]

Zowel door deze terloopse correctie van de opgave als met de vergelijking tussen zijn methode en die van Helmreich toont Van Ceulen zijn eigen kunde. Opgave elf van Van Ceulen is in dit opzicht helemaal een tentoonspreiding van de kunde en nauwkeurigheid van Van Ceulen. Ook deze opgave komt uit het boek van Helmreich. Van Ceulen verstrekt de lezer hier echter summiere informatie; namelijk twee antwoorden (de één berekend met $\pi = 3\frac{1}{7}$ en de ander berekend met Van Ceulens nauwkeurigere waarde van π) op een vraag uit het boek van Helmreich. Van Ceulen vond het hier zelfs niet nodig de opgave of de exacte figuur weer te geven zodat de lezer zijn gelijk kon nagaan. (Hierbij moet ik overigens wel opmerken dat ook Helmreich bij deze opgave geen uitwerking en figuur voegt. Helmreich geeft echter wel de opgave inclusief antwoord.) Een zeer uitgebreide beschrijving en uitwerking geeft Van Ceulen echter wel weer in opgave twaalf. Ook deze opgave behandelt Helmreich in zijn *Von Feldmessen*. Van Ceulen verwijst echter bij deze opgave niet naar Helmreich (hij vermeldt zelfs niet dat ook Helmreich aan deze opgave een compleet hoofdstuk gewijd heeft), maar naar het oorspronkelijke werk waarin de opgave verscheen.

4.7 Hoofdstuk 19, opgave 12

Gegeven: Het maanvormige stuk land $CYDH$ wordt ingesloten door de cirkelbogen CYD, behorend bij de cirkel met middelpunt G en straal $GC = GD$, en CHD, behorend bij de cirkel met middelpunt B en straal $BC = BD$. Er geldt dat boog $CYD = 9152$ roeden, cirkelboog $CHD = 8415$ roeden, rechte $YH = 609$ roeden en koorde $CD = 7560$ roeden. Punt E ligt in het midden van koorde CD.
Gevraagd: Hoe groot is het stuk land $CYDH$?



interpoleert. Deze afwijkingen komen nog bovenop het verschil in waarde met Van Ceulen na het worteltrekken, dus het is niet verwonderlijk dat Helmreichs waarde zoveel afwijkt van de waarde van Van Ceulen.

[49] Van Ceulen zegt er niet bij in hoeveel decimalen hij zijn zelf berekende π hier toepast. Gezien de uitkomst blijkt het te gaan om $\pi = 3,141592653$, oftewel een waarde voor π in 10 decimalen.

[50] Van Ceulen (1596: fol.56v)

Dit vraagstuk van Niclaes Reymers is Van Ceulen in 1587 in Bremen tegengekomen " in een ghedruckt Bouck mede tot *Leipsig* in 't Jaer van 1583".[51] Alhoewel hij de precieze titel van het werk niet noemt, blijkt het te gaan om het werk *Geodaesia Ranzoviana. Landt-Rechnen, und Feldmessen, sampt Messen allerhand Grösse* van Nicolaus Raymarus (Reymers) Ursus, gedrukt door Georg Defner in Leipzig in 1583. Reymers was een autodidact die ten tijde van de publicatie van het boek als landmeter in dienst was bij de stadhouder van de Deense koning, Heinrich Rantzau in Ditmarsen.[52] Van Ceulen beschrijft dat Reymers dit vraagstuk als proefstuk voor landmeters bedoeld heeft. Heinrich Rantzau, aan wie het boek is opgedragen, zou ervoor moeten zorgen dat niemand als landmeter mag worden aangesteld voordat hij het proefstuk heeft opgelost. Inderdaad is in het boek van Reymers het proefstuk te vinden, welke Reymers in zijn slotwoord geeft en zelf in zijn werk niet oplost. Wat hem betreft is het proefstuk daadwerkelijk als uitdaging voor zijn lezers bedoeld. Deze uitdaging neemt Van Ceulen in *Vanden Circkel* graag aan.

4.7.1 Uitwerking door Van Ceulen op de manier van Reymers

Vraagstukken zoals dit proefstuk over een maanvormig stuk land behandelt Reymers in de hoofdtekst van de *Geodaesia Ranzoviana* niet. Wel werkt hij andere opgaven uit die het meten van de oppervlakten van velden behandelen. Bovendien geeft Reymers in zijn slotwoord ten aanzien van het proefstuk de aanwijzing dat dit middels het gebruik van cirkels, vierhoeken en driehoeken is op te lossen. Met behulp van de informatie uit de gehele *Geodaesia Ranzoviana*, probeert Van Ceulen allereerst het vraagstuk op Reymers' manier uit te werken. Volgens Van Ceulen heeft Reymers waarschijnlijk koorde CD als de zijde van een ingeschreven vierkant van cirkel CHD genomen, zodat hij aanneemt dat cirkelboog CHD een kwart is van de gehele cirkelomloop.[53] Op eenzelfde manier heeft Reymers volgens Van Ceulen waarschijnlijk aangenomen dat boog CYD een derde is van de bijbehorende gehele cirkelomloop, zodat CD in deze cirkel de zijde is van de ingeschreven gelijkzijdige driehoek. In het maanvormige stuk land van het proefstuk gelden zodoende dezelfde verhoudingen als in Van Ceulens opgave zeven uit hoofdstuk negentien. Dit zou echter impliceren dat (voor $\pi = 3\frac{1}{7}$) de binnenste boog in dit geval niet gelijk is aan 8415, maar aan $8400\frac{1}{2}$ roeden.[54] Op eenzelfde manier zou dit impliceren dat de buitenste boog niet gelijk is aan 9152, maar aan $9145\frac{1}{3}$. De oppervlakte van deze maan (die dus niet geheel met de gegevens strookt!) is vervolgens gemakkelijk te bepalen, omdat deze maan $CYDH$ gelijkvormig is met maan $BECF$ uit opgave zeven. Van Ceulen geeft aan dat zodoende geldt: $\frac{BC^2}{\text{Opp}(BECF)} = \frac{CD^2}{\text{Opp}(CYDH)}$. Wanneer Van Ceulen de oppervlakte van $BECF$ uitrekent met $\pi = 3\frac{1}{7}$, volgt dat $CYDH$ een oppervlakte heeft van weinig meer dan $3544188\frac{2}{3}$ kwadraatroeden. Berekent hij de oppervlakte met zijn meer nauwkeurige waarde van π, dan komt hij uit op een oppervlakte van 3545192,174 kwadraatroeden.

Deze uitwerking is echter niet geheel bevredigend, omdat net als bij opgave tien de aannames niet met de gegevens overeenkomen. De gegevens bij de opgave zijn inconsistent en Van Ceulen geeft dan ook na deze eerste uitwerking aan dat Reymers' vraag "constigh ende waerdigh een proef-stuck" is wanneer de lengte van de buitenste boog CYD onbekend is aan het begin van het proefstuk.[55] Van Ceulen past zodoende de opgave iets aan, waarbij de lengte van de buitenste boog niet wordt gegeven en de rest van de gegevens hetzelfde blijven.Na het introduceren van deze aangepaste vraag, geeft Van Ceulen een uitgebreide uitwerking van dit nieuwe proefstuk.

4.7.2 Uitwerking van het aangepaste proefstuk door Van Ceulen

Van Ceulen werkt zijn eigen proefstuk eerst geheel uit met behulp van de onnauwkeurige benadering $\pi = 3\frac{1}{7}$. Hij begint met de opmerking dat $\frac{\text{Sin}(\text{bg}(HD))}{\text{bg}(HD)} = \frac{CD}{\text{bg}(CHD)} = \frac{168}{187} \approx \frac{10000000}{11130952}$ (door EL.V:15).

[51] Van Ceulen (1596: fol.57r)
[52] Launert (2007: 10)
[53] Hierbij wil ik opgemerken dat Van Ceulen erg voorzichtig omspringt met Reymers woorden in de mond leggen. In de alinea waarin hij deze uitwerking behandelt wijst hij maar liefst drie keer op het feit dat hij slechts naar Reymers mening gist.
[54] Dat dit inderdaad zo is, kun je op precies dezelfde manier berekenen als in opgave 7. Er geldt dat de straal van cirkel CHD gelijk is aan $\frac{ED}{\text{Sin}(CBD)} = \frac{3780}{\frac{1}{2}\sqrt{2}} \approx 5345,73$ roeden, zodat cirkelboog CHD met gebruik van de Archimedische $\pi = 3\frac{1}{7}$ een lengte heeft van ongeveer 8400,43 roeden.
[55] Van Ceulen (1596: fol.57r)

Hij kiest ervoor om bij het werken met deze verhouding in eerste instantie te rekenen in parten in plaats van roeden, zodat hij minder hoeft om te rekenen in het eerste gedeelte van zijn uitwerking. Allereerst berekent Van Ceulen zodoende de gehele omtrek van de basiscirkel met een diameter van 20000000 parten, waarbij hij uitkomt op een lengte van 62857143 parten.

De beste techniek die Van Ceulen tot zijn beschikking heeft om vervolgens de booglengte van HG te bepalen vanuit de bovengenoemde verhouding $\frac{\text{Sin}(\text{bg}(HD))}{\text{bg}(HD)} \approx \frac{10000000}{11130952}$, is handmatige interpolatie. Dit kan een zeer tijdrovende klus zijn. Daarom neemt Van Ceulen, zeker in vergelijking met zijn vorige uitgebreide uitwerkingen, op dit punt een onverwacht grote stap: hij neemt voor het moment aan dat boog HD 45° is. Hij licht dit verder niet toe, maar in het perspectief van zijn eerdere uitwerking op de manier van Reymers is dit een begrijpelijke keuze. Daarin nam Van Ceulen namelijk aan dat boog CHD een kwart van de bijbehorende gehele cirkelomloop was, zodat boog HD een achtste van de gehele cirkelomloop was. De antwoorden die hij op deze manier verkreeg, weken slechts een klein beetje af van de gegevens. Door al aan te nemen dat α daarom in de buurt van 45° moet zitten, bespaart Van Ceulen zich hier zodoende een hoop werk.

Van Ceulen berekent namelijk of de verhouding $\frac{\text{Sin}(\text{bg}(HD))}{\text{bg}(HD)}$ inderdaad overeenkomt met de gewenste $\frac{10000000}{11130952}$. Bij $HD = 45°$ blijkt de verhouding 19275 kleiner dan de gewenste. Van Ceulen neemt daarom aan dat boog $HD = 46°$, waarna de verhouding $\frac{\text{Sin}(\text{bg}(HD))}{\text{bg}(HD)}$ 34489 te groot blijkt. Door middel van lineaire interpolatie vindt Van Ceulen vervolgens dat $45°21' < HD < 45°22'$. Door deze beide grenswaarden vervolgens in te vullen voor HD, kan Van Ceulen nogmaals lineaire interpolatie toepassen waardoor hij vindt dat boog HD gelijk moet zijn aan $45°21'42\frac{2}{3}''$. Met behulp hiervan kan Van Ceulen zowel de lengte van boog HD (namelijk 7920323 parten), als de lengte van $ED(= \text{Sin}(45°21'42\frac{2}{3}'') \approx 7115584$ parten) bepalen.

Met behulp van deze waarden wil Van Ceulen de lengte van de buitenste boog CYD berekenen. Daarvoor laat hij allereerst zien dat $BE = \text{Sin}(90° - \text{bg}(HD)) = 7026269$ parten. Door BE vervolgens van de straal BH (die per definitie 10000000 parten is) af te trekken, verkrijgt hij de lengte van EH, namelijk 2973731 parten oftewel ongeveer 1579,73023 roeden.[56] Hieruit volgt bovendien dat $EY = EH + YH \approx 2188,73023$ roeden.

Vervolgens berekent Van Ceulen met zijn bekende methode de diameter behorend bij de cirkel CYD. Je kunt hiervoor handig de koorde CD en de diameter door E en Y gebruiken, en met behulp van EL.III:35 vind je dan net als Van Ceulen voor de diameter een lengte van ongeveer 8716,89884 roeden. Wanneer je nu de halve diameter GD als straal neemt, geldt dat $\text{Sin}(YD) = ED$. Omrekenen en opzoeken geeft dat YD $60°8'39\frac{3}{40}''$ groot is, oftewel in de gegeven figuur een lengte heeft van ongeveer 4576,976 roeden. De buitenste boog CYD heeft zodoende een lengte van ongeveer 9153,934 roeden. Dit maakt tevens duidelijk dat de gegevens in de oorspronkelijke opgave inconsistent waren, aangezien daar werd gegeven dat boog CYD 9152 roeden lang zou zijn.

Om nu de oppervlakte van de maan te kunnen bepalen berekent Van Ceulen dat BH (de straal van de binnenste cirkel) ongeveer 5312,283 roeden lang is, waardoor $BE = BH - EH \approx 3732,553$ roeden.[57] Verder geldt dat $EG = GY - EY \approx 2169,7192$ roeden. Met behulp van deze lijnstukken berekent Van Ceulen vervolgens dat $\text{Opp}(\triangle CBD) \approx 14109050,34$ kwadraatroeden en dat $\text{Opp}(\triangle CGD) \approx 8201538,576$ kwadraatroeden. Trek je deze van elkaar af, dan vind je dat de oppervlakte van $BCGD \approx 5907511,76$ kwadraatroeden. Ten slotte berekent Van Ceulen de oppervlakte van cirkeldeel $BCHD$, door straal BD en boog HD met elkaar te vermenigvuldigen. Hij vindt dat $\text{Opp}(BCHD) \approx 22351430,7$ kwadraatroeden. Wanneer je hier de oppervlakte van $BCGD$ van aftrekt, volgt dat $\text{Opp}(GCHD) \approx 16443919$ kwadraatroeden. Op eenzelfde manier berekent Van Ceulen de oppervlakte van $GCYD$ door YD en GD te vermenigvuldigen. Hij vindt ten slotte als oppervlakte voor de maan $CYDH = GCYD - GCHD \approx 3504557$ kwadraatroeden.

[56] Het omrekenen naar roeden kan heel gemakkelijk door de bekende waarden van $ED = 3780$ roeden $= 7115584$ parten te gebruiken in de regel van drieën.

[57] Hierbij kun je wederom de bekende lengte van ED gebruiken.

Van Ceulen heeft nu de opgave opgelost met behulp van de Archimedische benadering $\pi = 3\frac{1}{7}$, wat volgens hem in kleine cirkels geen probleem is. In grote cirkels en figuren maakt het gebruik van een nauwkeurige π echter wel degelijk verschil. Om het goede voorbeeld te geven, doet Van Ceulen zijn hele berekening nog eens over met behulp van 'zijn' proportie. Opvallend is hierbij dat hij in deze berekening gebruik zegt te maken van zowel $\pi = 3,141592653$ als $\pi = 3,14159265$. Kennelijk vond hij het niet nodig zijn waarde voor π in 20 decimalen voor de gehele berekening te gebruiken of om gedurende de hele berekening met hetzelfde aantal significantie cijfers van π te werken? De berekening zelf doet Van Ceulen overigens op precies dezelfde manier als boven en hij komt uiteindelijk uit op een oppervlakte van de maan $CYDH$ van $3506933\frac{11}{25}$ kwadraatroeden, wat meer dan 2376 kwadraatroeden meer is dan hij met behulp van $\pi = 3\frac{1}{7}$ vond.

⋆

In deze opgave laat Van Ceulen zien dat hij opgaven over maanvormige stukken land kan oplossen, waarin de verhoudingen van zijn opgave zeven niet gelden. Zoals in de meeste opgaven grijpt hij hierbij terug op het gebruik van de tabellen. Het is volgens Van Ceulen nu aan de lezer zelf om te oefenen met dergelijke opgaven: de vijf volgende opgaven werkt Van Ceulen niet uit en moet de lezer zodoende zelf oplossen. In dit hoofdstuk heb ik een beeld geschetst dat representatief is voor de opgaven die Van Ceulen behandelt in zijn 'landmeetkundige' hoofdstukken achttien en negentien. Maar hoe landmeetkundig zijn deze opgaven en uitwerkingen in vergelijking met opgaven en uitwerkingen uit landmeetkundige handboeken uit dezelfde tijd? En wie wilde Van Ceulen bereiken met deze hoofdstukken? Op deze vragen zal ik in het volgende hoofdstuk ingaan.

5 Liefhebbende landmeters of landmetende liefhebbers?

In het voorgaande heb ik de achtergrond en de inhoud van drie hoofdstukken uit Van Ceulens *Vanden Circkel* behandeld. In het nu volgende wil ik nagaan wat de rol van deze hoofdstukken is, en daarmee sterk samenhangend, voor welk publiek deze hoofdstukken lijken te zijn geschreven. Schreef Van Ceulen de hoofdstukken zeventien tot en met negentien vooral voor landmeters en was dit gedeelte van zijn boek het uiteindelijke nuttige resultaat van zijn inspanningen voor het vinden van π? Of zette Van Ceulen de hoofdstukken over landmeetkunde strategisch in om het praktisch nut van zijn inspanningen aan te prijzen en schreef hij voornamelijk voor de liefhebber met verstand van de meet- en rekenkunst? Om antwoord te kunnen geven op deze vragen, is het allereerst interessant om na te gaan op welke manier Van Ceulen zelf de hoofdstukken zeventien tot en met negentien presenteert. Vervolgens zal ik nagaan in hoeverre de genoemde landmeetkundige hoofdstukken uit *Vanden Circkel* aansluiten bij drie landmeetkundeboeken uit het laatste kwart van de zestiende eeuw.

5.1 Van Ceulens retoriek

Alhoewel het alleen al vanwege de titel van zijn boek onwaarschijnlijk is dat Van Ceulen een landmeetkundig handboek wilde schrijven met *VandenCirckel*, is het opvallend hoezeer Van Ceulen de belangrijkheid benadrukt van de landmeetkundige hoofdstukken zeventien tot en met negentien in *Vanden Circkel*. Op verschillende plaatsen in het werk presenteert hij deze hoofdstukken als zeer nuttig voor landmeters. Al op het titelblad worden de tabellen uit hoofdstuk zeventien en de bijbehorende hoofdstukken met uitleg en opgaven kort vermeld, met de toevoeging dat deze "hoogh-noodigh voor de Land-meters" zijn. Maar ook in de twee voorreden en de betreffende hoofdstukken zelf besteedt Van Ceulen aandacht aan het praktisch nut van zijn werk voor de landmeters.

5.1.1 De voorreden

In de hoop protectie te krijgen, draagt Van Ceulen *Vanden Circkel* op aan Prins Maurits. Dit was in de zestiende eeuw een gebruikelijke gang van zaken en boeken uit die tijd begonnen dan ook vaak met een opdrachtbrief. In zijn opdrachtbrief aan Prins Maurits benadrukt Van Ceulen allereerst het belang van zijn beroep (de kunst van het meten en tellen) in het algemeen. Daarna gaat hij in op het belang van het π-vraagstuk, zonder echter de landmeetkunde te noemen. Na het opnoemen van enkele autoriteiten, waaronder zowel rekenmeesters als landmeters, kaart hij ten slotte in een zin tussen haakjes het belang van het π-vraagstuk in de landmeetkunde aan. Opvallend in dit voorwoord is de rol van liefhebberij. Van Ceulen geeft herhaaldelijk zijn toewijding aan, iets dat niet ongebruikelijk is in een dergelijke voorrede, en merkt op dat hij met "groote lust en genegentheyt" aan het boek heeft gewerkt. Liefhebberij alleen is echter niet genoeg. De ideale lezers hebben volgens Van Ceulen ook genoeg verstand van de materie om het belang van *Vanden Circkel* in te zien. Het boek is dan ook echt iets voor de prins, aangezien deze "niet alleen een lief hebber deser heerlijcker konst is: maer een recht verstandt der selver heeft". Een dergelijke uitspraak kun je uiteraard scharen onder de zo gebruikelijke beleefdheidsfrasen die opdrachtbrieven bevatten. Zoals ik echter al in mijn tweede hoofdstuk beschreef, was Maurits inderdaad een liefhebber met verstand, die in 1600 de Duytsche Mathematique zou oprichten en bovendien privélessen van Simon Stevin ontving.

Na de voorrede aan Prins Maurits volgt een voorwoord gericht aan het overige publiek van *Vanden Circkel*: de "Konst-lievende Lesers". In dit voorwoord benadrukt Van Ceulen het belang van het boek (en in het bijzonder van de hoofdstukken zeventien tot en met negentien) voor landmeters. Van Ceulen geeft voorbeelden van verschillen ten opzichte van andere boeken met behulp van zijn nauwkeurige benadering van π, inclusief een vooraankondiging van het proefstuk van Reymers dat hij in opgave twaalf van hoofdstuk negentien behandelt. Bovendien waarschuwt hij zijn publiek ervoor dat in enkele boeken "valsche regulen" worden gebruikt, oftewel wiskundig onjuiste methoden worden gehanteerd om bijvoorbeeld de oppervlakte van een driehoek te berekenen. Van Ceulen geeft aan dat hij in *Vanden Circkel* de goede methoden zal geven, waarbij hij een vooraankondiging geeft van opgave vier uit hoofdstuk negentien. Van Ceulen benadrukt dat hij het boek heeft geschreven voor het "gemeene wel-varen". Ten slotte geeft hij aan dat hij bij positieve ontvangst een boek zal schrijven over "den alder-constighsten Regel Cos". Waar het belang van het boek voor de landmeetkunde in het gehele voorwoord sterk wordt benadrukt en het aangesproken publiek (deels) lijkt te bestaan uit landmeters, roept deze opmerking de vraag op wat de landmeter heeft aan een boek over algebra. Is een dergelijk boek wellicht net als *Vanden Circkel* toch meer bedoeld voor de liefhebber met verstand?

Interessant in dit kader is ook de inhoudsopgave van de 22 hoofdstukken uit *Vanden Circkel* die Van Ceulen geeft na zijn twee voorreden. De hoofdstukken achttien en negentien worden samengenomen in Van Ceulens beschrijving en hierover zegt Van Ceulen expliciet dat deze van nut zijn voor de landmeter, iets dat bij de overige hoofdstukken niet wordt vermeld:

In dese Capittelen vindt ghy het ghebruyck der Tafelen / eensdeels met eenighe Exempelen daer toe dienende / door welcke de Land-meters met voordeel (mits hebbende een Instrument / daer door de grootte der winckelen gevonden werden) kunnen vinden sonder meten / de lengde van plaetsen die onmeetbaer zijn / met veel noodtsakelijcke stucken /etc.[58]

Het precieze publiek is lastig uit de twee voorwoorden af te leiden. Het is opvallend hoeveel nadruk Van Ceulen legt op juist de landmeetkundige hoofdstukken in zijn boek. En landmeters zijn in veel gevallen op te vatten als liefhebbers met verstand van zaken. Aan de andere kant is liefhebbers (met verstand) een breed begrip en wellicht is het begrip landmeters juist te exclusief om het beoogde publiek van Van Ceulen mee aan te duiden. Wordt dit duidelijker in de hoofdstukken zelf?

5.1.2 De hoofdstukken

In hoofdstuk zeventien spreekt Van Ceulen zijn lezerspubliek vooral toe als landmeters. Hij heeft de tabellen opgesteld voor de landmeters, wat hij zowel aan het einde van hoofdstuk zestien als boven elke tabel vermeldt. Op het einde van hoofdstuk zeventien vermeldt hij echter dat hij er niet aan twijfelt dat "den Liefhebber sal in't volghende Capittel (door mijn werck aldaer gedaen) volcomen verstandt deser volghender Tafelen crijghen."[59] Hoofdstuk achttien is dus bedoeld voor de liefhebber, maar of dit de liefhebber in brede zin (met verstand van zaken) of in enge zin (de landmeter) is, blijft in het midden.

De opgaven die in hoofdstuk achttien worden behandeld geeft Van Ceulen weer in een receptvorm en zijn duidelijk bedoeld om de basisbeginselen van het werken met de tabellen uit te leggen. Van Ceulen schrijft bijvoorbeeld in opgave veertien: "Ick sal den aencomelinghen deser konst den wegh wijsen."[60] Het blijft hierbij zowel aannemelijk om als publiek landmeters die nog nooit met tabellen hebben gewerkt te nemen, als liefhebbers in het algemeen met voldoende kennis van zaken om de opgaven te kunnen begrijpen.[61] Opvallend is verder dat er enkel in de opgaven acht en tien expliciet van stukken land wordt gesproken. De figuren die in de rest van de opgaven worden behandeld worden aangeduid met onder andere driehoek en vierhoek. Dit wijkt in retoriek opvallend af van bijvoorbeeld het landmeetkundeboek van Andreas Helmreich waar Van Ceulen later naar verwijst. In dit boek worden ook de basisopgaven over driehoeken in termen van velden behandeld. Dit zou een aanwijzing kunnen zijn dat Van Ceulen een breder publiek beoogde dan puur praktisch ingestelde landmeters.

In hoofdstuk negentien begeeft Van Ceulen zich vergeleken met hoofdstuk achttien veel explicieter op het terrein van de landmeetkunde. Niet alleen gebruikt hij in dertien van de achttien opgaven veldtermen om de figuren bij de opgaven aan te duiden, ook staat er bovenaan elke bladzijde de aanduiding "Van't Land-meten" (in tegenstelling tot hoofdstuk achttien waarboven "Vande Rechte Linien" staat). Ook in de beschijving (of titel) bij het hoofdstuk geeft van Ceulen expliciet aan dat hij in dit hoofdstuk het gebruik van de tabellen ten aanzien van het meten van velden zal behandelen. In dit hoofdstuk zijn enkele opgaven retorisch gezien interessant. Opgave vier is er een van, omdat deze een berisping bevat tegen landmeters die verkeerde methoden gebruiken om de oppervlakte van een driehoek te bepalen, zoals ik in het vorige hoofdstuk heb laten zien en zoals Van Ceulen in zijn voorrede al aankondigde. Een dergelijke

[58] Het valt een moderne lezer wellicht op dat Van Ceulen de lezer aanspreekt in de tweede persoon (ghy), terwijl de landmeters in de derde persoon worden aangeduid. Hieruit valt echter niet af te leiden dat de lezers niet samenvallen met de landmeters. In het landmeetkundehandboek van Sems en Dou uit 1600, dat zeer duidelijk bestemd is voor landmeters(-in-spé), wordt namelijk een zelfde grammaticale vorm gehanteerd.

[59] Van Ceulen (1596: fol.26r)

[60] Van Ceulen (1596: fol.53r)

[61] Enige basiskennis van de *Elementen* van Euclides is bijvoorbeeld wel vereist voor het begrijpen van de hoofdstukken.

berisping past prima in een landmetershandboek uit de zestiende eeuw. Het aangeven en verbeteren van foutieve methoden verleent de auteur(s) autoriteit en dit procédé wordt dan ook veelvuldig toegepast in de landmeetkundige handboeken van Helmreich en Reymers en het eerste uitgebreide Nederlandse landmeetkundehandboek van de landmeters Sems en Dou uit 1600.

In opgave negen vervolgens lijkt Van Ceulen juist weer wat meer de liefhebberij- en theoretische kant op te gaan, wanneer hij opmerkt dat deze opgave een "Constighe Vraghe" is. Hij werkt deze opgave zelf niet uit en geeft enkel aanwijzingen voor de oplossing zoals hij hem zelf gevonden heeft. In het *WNT* vond ik voor het bijvoegelijk naamwoord "constigh" de betekenis "Van kunst, van bijzondere bekwaamheid getuigende, of: met kunst, met bijzondere bekwaamheid gemaakt, vervaardigd of bewerkt." Opvallend is dat Van Ceulen niet de uitwerking, maar het vraagstuk zelf kunstig vindt. Met zijn bewoording wekt hij de indruk dat het hier niet enkel gaat om een praktisch vraagstuk voor landmeters, maar om een vraagstuk dat een interessante uitdaging biedt aan liefhebbers in het algemeen.

Opgave tien tot en met twaalf zijn vooral interessant voor het belezen publiek, aangezien Van Ceulen hier uitgebreid twee landmeetkundeboeken aanhaalt. Net als in opgave vier verlenen deze verwijzingen hem autoriteit omdat hij de opgaven sneller en nauwkeuriger op zegt te lossen dan zijn bronnen. Opgave elf is hier een extreem voorbeeld van, omdat Van Ceulen hier enkel zijn eigen (nauwkeurige) antwoord geeft zonder zelfs maar de oorspronkelijke opgave te noemen. Een onbelezen landmeter-in-spé zal hier weinig mee kunnen, terwijl een landmeter en/of liefhebber die bekend is met Helmreich hier wellicht wel iets aan heeft. In opgave twaalf werkt Van Ceulen het proefstuk van Reymers uit, zoals ik in het vorige hoofdstuk liet zien. Hij past het proefstuk zelfs zodanig aan dat het een "constigh ende waerdigh" proefstuk is, wat alweer niet gelijk doet denken aan een praktische landmeetkundige situatie maar eerder aan een theoretisch interessant vraagstuk. Hierbij moet ik echter wel opmerken dat Reymers zijn proefstuk expliciet voor landmeters maakte, zodat ook het door Van Ceulen aangepaste vraagstuk kan worden beschouwd als bedoeld voor landmeters.

Overigens is het opvallend dat Van Ceulen in de hoofdstukken achttien en negentien enkel de *Elementen* van Euclides (die ook worden onderwezen in de opleiding tot landmeter) en de twee landmeetkundige boeken van Helmreich en Reymers aanhaalt. Hij verwijst in deze hoofdstukken niet naar meer theoretische of astronomische boeken waarin wordt gewerkt met tabellen. Dit is opmerkelijk omdat de tabellen in de zestiende eeuw voornamelijk in de astronomie werden gebruikt, zoals ik in hoofdstuk drie heb beschreven. In zijn gehele werk schrijft Van Ceulen echter geen enkele keer over astronomie. De keuze van zijn verwijzingen versterkt zodoende het landmeetkundige karakter van de hoofdstukken. Hierbij wil ik echter wel een kanttekening plaatsen. Een groot voordeel van deze landmeetkundige boeken is namelijk dat ze in de volkstaal (het Duits in dit geval) zijn geschreven. Daar Van Ceulen geen Latijn of Grieks kon lezen, is het ook waarschijnlijk dat hij (deels) om deze reden naar deze boeken verwijst. De boeken in het Latijn waarin meer theoretisch of in een andere context (zoals astronomie) met de tabellen werd gewerkt, kon hij simpelweg niet gebruiken.

5.1.3 Een overtuigende publieksvoorkeur?

Met betrekking tot de retoriek van Van Ceulen is er zodoende een aantal argumenten dat ervoor pleit om het beoogde publiek van *Vanden Circkel* breder te beschouwen dan alleen de landmeters. Het gebruik van geometrische termen in plaats van landmeetkundige termen, het veelvuldig benadrukken van liefhebberij, het aanduiden van vraagstukken met "constigh" en het verwijzen naar landmeetkundige bronnen duiden erop dat Van Ceulen lijkt te schrijven voor de liefhebber van de wiskunde waarbij hij het nut van het boek en zijn inspanningen wil aantonen met behulp van voorbeelden uit de landmeetkunde. De genoemde argumenten zijn echter nog niet geheel overtuigend. Het is daarom interessant om een vergelijking te maken tussen de opgaven uit hoofdstuk achttien en negentien in *Vanden Circkel* en de opgaven uit de genoemde boeken van Helmreich en Reymers en het Nederlandse landmeetkundige handboek van Sems en Dou.

5.2 Vergelijkend warenonderzoek

De landmeetkundige boeken van Helmreich, Reymers en Sems en Dou die ik als vergelijkingsmateriaal gebruik, hebben gemeen dat ze zich expliciet en volledig richten op de praktijk van het landmeten. Bovendien komen alle drie de boeken uit het laatste kwart van de zestiende eeuw: Reymers (Duitstalige) boek werd gepubliceerd in 1583, Helmreichs (Duitstalige) boek verscheen in 1591 en *Practijck des Lantmetens* van Johan Sems en Jan Pieterszoon Dou kwam uit in 1600. Laten we aannemen dat deze boeken samen een representatief beeld geven van de landmeetkundeboeken uit Van Ceulens tijd. De vraag is nu in hoeverre de inhoud van de hoofdstukken achttien en negentien van *Vanden Circkel* aansluiten bij de genoemde landmeetkundige boeken. Passen de hoofdstukken binnen de landmeetkundige traditie of zijn er belangrijke afwijkingen aan te wijzen?

Opvallend is allereerst dat vrijwel alle opgaven uit hoofdstuk achttien en negentien van *Vanden Circkel* in vergelijkbare vorm zijn terug te vinden in de landmeetkundige boeken van Helmreich, Reymers en Sems en Dou. Ook de maanvormige stukken land die Van Ceulen bespreekt, worden (ondanks het feit dat dergelijke stukken land niet direct als veld in de werkelijkheid zullen bestaan) in de overige drie boeken uitgebreid behandeld. Wat betreft het soort opgaven sluiten de hoofdstukken zodoende perfect aan bij de landmeetkundige literatuur aan het einde van de zestiende eeuw. Er zijn echter een aantal opvallende verschillen tussen Van Ceulens uitwerking van de opgaven en de uitwerking in de landmeetkundehandboeken.

5.2.1 Tabellen leren

Een eerste verschil betreft het gebruik van de tabellen door Van Ceulen. Bij het vergelijken van de hoofdstukken van Van Ceulen met de landmeetkundige handboeken moeten we goed in het oog houden dat Van Ceulens opgaven er puur op gericht zijn om te oefenen met de tabellen en niet op het uitleggen van de praktijk van het landmeten in zijn geheel. Zoals ik al eerder opmerkte werkt Reymers in zijn boek in het geheel niet met tabellen, waardoor zijn uitwerking van de opgaven sterk van Van Ceulens uitwerking afwijkt. De twee andere landmeetkundeboeken werken in slechts een klein gedeelte van de opgaven met de tabellen. Opvallend is dat de hoofdstukken in *Vanden Circkel* ook veel opgaven bevatten die in de boeken van Helmreich en Sems en Dou zonder tabellen worden behandeld. Het betreft hier bijvoorbeeld de opgaven over driehoekige stukken land. Deze opgaven komen veelvuldig voor bij Sems en Dou en Helmreich (en Reymers), maar worden daar zonder hulp van tabellen opgelost. Dit verschil is opvallend, maar zegt in feite weinig over het beoogde publiek van Van Ceulen.

5.2.2 Nauwkeurig meten

Een verschil dat meer aanknopingspunten biedt voor een beoogd publiek en rol van de hoofdstukken, betreft de nauwkeurigheid van de antwoorden. Van Ceulen besteedt opvallend veel aandacht aan de nauwkeurigheid van zijn antwoorden, zoals ik in het vorige hoofdstuk heb laten zien. Hierbij speelt de door hem gevonden waarde voor π een grote rol. In bijvoorbeeld opgave twaalf van hoofdstuk negentien merkt Van Ceulen hier over op, voordat hij aan de berekening begint met behulp van zijn nauwkeurige waarde van π:

[M]en behoort in sulcke saecken gheen arbeydt te sparen / om oock niet naer by: maer volcomen ende ware Antwoordt / elcke Lief-hebber te gheven / op't ghene ghevraeght wert / ofte dat hy aenneemt te solveeren / De Land-meters moeten haer Eer ende Eedt in't meten ende rekenen betrachten. [62]

Hoe anders is dit in het boek van Sems en Dou, die in hun voorrede overigens hun dank betuigen aan meester Van Ceulen. Wanneer zij een lijnstuk met lengte $\sqrt{432}$ vinden merken zij op:

Maer dewijle ons voornemen niet en is / alhier met irrationale ghetalen te wercken / uyt oorsaecke dat het den meestendeel der Lant-meters niet en souden connen verstaen: ende mede om dat soo vele 'tlant-meten belangt / dese seer groote perfectie niet noodich en is / (Wy seggen so vele de practijc des lant-metens belangt / want wy hier mede geensins willen verwerpen 'twercken door d' irrationale

[62] Van Ceulen (1596: fol.57v)

ghetalen / hoochnoodich zijnde / so wel inde Geometria / als inde regel Cos / waer door men dickwils coemt tot solutie van veel constighe vraghen) want wy hebben alreede bewesen int 10. Capittel des eersten deels / dat de linien opt lant so nau niet en zijn te meten / dewijle het mede by de Lant-meters 'tghebruyck is wat tot gheen duym en coemt / te laten lopen / so sullen wy sulcx in ons werck oock doen.[63]

Ook voor het afronden van de hoekgrootte gebruiken Sems en Dou een dergelijke redenering, die ze bovendien afsluiten in rijm: "Die hier teghen wilde spreken / die betoont metter daet / dat hy de practijcke ende 'tgebruyck der instrumenten niet en verstaet"[64]

De praktische kant van het landmeten komt zodoende bij de uitwerkingen van Sems en Dou veel sterker naar voren dan bij Van Ceulen. Dit komt ook tot uiting in het feit dat zij het gebruik van instrumenten expliciet aangeven. De lezer moet in vrijwel iedere opgave meten en aflezen. Dit is ook herhaaldelijk terug te vinden in de boeken van Helmreich en Reymers. In zijn studie over de Nederlandse landmeetkunde schrijft Pouls dan ook dat vanaf het eind van de zestiende eeuw "de typisch landmeetkundige boeken, die nu gaan verschijnen zowel de wiskunde als instrumenten en methoden [behandelen]."[65] In de landmeetkundige hoofdstukken in *Vanden Circkel* worden instrumenten en praktische afrondingsoverwegingen echter compleet buiten beschouwing gelaten. De lezer van Van Ceulen hoeft niet zelf het veld in en leert niets over het daadwerkelijke opmeten van land. Van Ceulen richt zich veel sterker op de kant van de berekeningen en wil deze zo nauwkeurig mogelijk uitvoeren (op papier). Hierop is echter één uitzondering. In opgave zeven van hoofdstuk achttien namelijk wijkt Van Ceulen af van zijn principes omtrent nauwkeurigheid, zoals ik al in het vorige hoofdstuk kort heb genoemd. Hij berekent hier in eerste instantie twee lijnstukken van respectievelijk 27,36302 roeden en 38,5809 roeden, waarna hij schrijft: "Dese ghevonden metet van A naar C 27 / ende van A naar B 38 roeden"[66] Hier gebruikt Van Ceulen zowel praktische termen (meten) als afronding. In geen van de overige opgaven doet Van Ceulen dit en ik kan geen goede reden bedenken voor het feit dat Van Ceulen in deze zevende opgave afwijkt van de rest van de opgaven. Wel is het feit dat Van Ceulen in de overige opgaven zeer nauwkeurig is en geen praktijkgerichte aanwijzingen geeft een sterk argument dat Van Ceulens hoofdstukken niet enkel gericht zijn op het inzetten van de tabellen in de praktijk van het landmeten, maar op een hoger theoretisch niveau zijn geschreven.

5.2.3 Wiskunde ter afsluiting?

Een ander argument voor een breder publiek dan landmeters is de aanwezigheid van twee afwijkende opgaven in de hoofdstukken achttien en negentien. Zoals ik al zei sluiten *vrijwel* alle opgaven uit deze hoofdstukken wat vorm betreft naadloos aan bij de landmeetkundige traditie. De laatste opgaven van beide hoofdstukken vallen hier echter buiten, en zijn bovendien ook in Van Ceulens hoofdstukken zelf een vreemde eend in de bijt. De laatste opgave (vijftien) van hoofdstuk achttien, waarvan Van Ceulen overigens geen uitwerking geeft, is opgesteld in een merkwaardig onpraktische vorm. De zijden BC en AC waarmee de oppervlakte van driehoek ABC moet worden berekend, zijn namelijk op de volgende manier bekend:

Alsmen tot de helfte des ghetals der Linie AC addeert / het ghetal der Linie BC ende tot deser summa-quadraet gheaddeert dat Quadraet van de helfte des ghetals AC, comt t'samen 6125.

Item dese twee Linien t'samen geaddeert / ende van der summa-quadraet ghesubstraheert des grootsten Lini (als BC) getals quadraet / ende tot den rest geaddeert de summa beyder Linien getallen / comt t'samen 4403.[67]

Een dergelijke situatie zal een landmeter in de praktijk nooit tegenkomen en in deze opgave ligt de nadruk zodoende veel meer op de wiskunde dan op de landmeetkunde.

Een heel ander type vraag vormt de laatste opgave (achttien) van hoofdstuk negentien waarin de op-

[63] Sems en Dou (1600: 83)
[64] Sems en Dou (1600: 187)
[65] Pouls (1997: 110)
[66] Van Ceulen (1596: fol.51r)
[67] Van Ceulen (1596: fol.53v)

pervlakte van een bol (met een straal die ongeveer gelijk is aan de aardestraal) moet worden berekend. Met deze opgave verlaat Van Ceulen het platte vlak, waar hij tot dan toe zijn opgaven in situeerde en maakt hij een uitstapje naar een driedimensionale situatie. De opgave sluit niet aan bij landmeetkundige opgaven en lijkt eerder astronomisch of wellicht zelfs theoretisch van aard. Overigens geeft Van Ceulen in deze opgave wel terloops een uitleg waarin hij aangeeft hoe je de gebruikelijke lengte-eenheid 'roeden' in 'mijlen' kunt omrekenen. Een dergelijke uitleg over het omrekenen van lengtematen is in de meeste landmeetkundige handboeken te vinden in een apart hoofdstuk, maar Van Ceulen verstopt zijn uitleg in de genoemde opgave waardoor deze niet gemakkelijk vindbaar is voor geïnteresseerde landmeters.

5.2.4 Theorie vs. Praktijk

Vergeleken met de drie landmeetkundige handboeken van Reymers, Helmreich en Sems en Dou zijn Van Ceulens landmeetkundige hoofdstukken opvallend weinig praktisch. Van Ceulen besteedt geen aandacht aan instrumenten of praktische aanwijzingen als meten, met als enige uitzondering opgave zeven uit hoofdstuk achttien. Waar Van Ceulen in vergelijking met de drie landmeetkundige werken wel opvallend veel aandacht aan besteedt is het gebruik van de tabellen. In zijn hoofdstukken gaat hij met behulp van deze tabellen opgaven te lijf die in de andere werken zonder de tabellen worden uitgewerkt. Hierbij komt dat Van Ceulen nauwkeurigheid hoog in het vaandel heeft staan en zo min mogelijk zijn antwoorden afrondt tot meetbare getallen. Ondanks het gebruik van landmeetkundige voorbeelden lijkt Van Ceulen zodoende een voorkeur te hebben voor situaties op papier die zo nauwkeurig en correct mogelijk kunnen worden uitgewerkt. De duidelijk meer wiskundige opgaven aan het eind van beide hoofdstukken bevestigen dit beeld. Het gebruik van tabellen zullen landmeters uit zijn boek prima hebben kunnen leren, evenals methoden voor oppervlaktebepaling, maar ook meer theoretisch geïnteresseerde liefhebbers van de wiskunde zullen mijns inziens goed uit de voeten hebben gekund met Van Ceulens hoofdstukken. Zoals hij zelf herhaaldelijk aangeeft heeft zijn boek een praktische toepassing in de landmeetkunde, die hij aanschouwelijk maakt door onder andere in hoofdstuk negentien zijn figuren aan te duiden in landmeetkundige termen. Aan de andere kant maakt Van Ceulen ook andere collega-wiskonstenaars vertrouwd met het werken met en de theorievorming achter de tabellen. Het beoogde publiek zal dus waarschijnlijk niet enkel hebben bestaan uit liefhebbende landmeters, maar uit de veel bredere groep van landmetende liefhebbers.

6 Conclusie

Voor wie en met welk doel schreef Van Ceulen? Dat is de vraag die ik in deze scriptie heb onderzocht met betrekking tot de hoofdstukken zeventien tot en met negentien uit *Vanden Circkel*. In retrospectief kunnen we stellen dat het publiek van Van Ceulen zich in elk geval niet beperkte tot zijn eigen tijdgenoten, al kijkt men tegenwoordig met een geheel andere blik naar zijn werk dan de zestiende-eeuwers. Gelukkig was Van Ceulen een begenadigde leermeester: zo duidelijk als hij in zijn tijd de 'nieuwe' wiskunde en het gebruik van de tabellen aan zijn tijdgenoten uitlegt, zo goed is hij voor een moderne lezer te volgen die zich middels zijn boek wil verdiepen in de 'oude' wiskunde.

In mijn scriptie heb ik de hoofdstukken onderzocht die Van Ceulen zelf in zijn werk herhaaldelijk aanprees als zeer nuttig voor de landmeters. De aandacht die hij aan deze hoofdstukken schenkt in bijvoorbeeld zijn voorreden staat in schril contrast met de aandacht die er tegenwoordig nog is voor deze wiskundig gezien weinig spannende hoofdstukken. Dit contrast heb ik aangegrepen als onderwerp voor mijn scriptie.

Van den Circkel verscheen vier jaar voor de oprichting van de ingenieursschool van Prins Maurits, in een klimaat waarin het educatieve systeem zich sterk ontwikkelde en het aantal *mathematical practitioners* groeide. Het is de vraag welk publiek Van Ceulen voor *Vanden Circkel* voor ogen had. Waren dit zijn toekomstige leerlingen? Of waren het zijn collega-wiskonstenaars met wie hij middels zijn werk een theoretisch gesprek wil aangaan? Van Ceulen zelf legt in zijn voorwoorden sterk de nadruk op de praktische toepasbaarheid in de landmeetkunde van de hoofdstukken zeventien tot en met negentien. Dat deze praktische toepasbaarheid niet geheel blijkt uit deze hoofdstukken is uit het voorgaande duidelijk geworden. Van Ceulen besteedt veel aandacht aan berekeningen en de nauwkeurigheid daarvan. De lezer hoeft het veld niet in om het daadwerkelijke meten te leren en Van Ceulen laat de praktische kant van het landmeten, dat wil zeggen de kant van de instrumenten en het opmeten, links liggen. Dat Van Ceulen zich daarbij enkel richt op het gebruik van tabellen en in het geheel niet op het gebruik van snoeren en stokken is tekenend. Pen en papier (en de tabellen uiteraard) is alles wat de lezer van *Vanden Circkel* nodig heeft. Daarom is het publiek dat Van Ceulen met zijn drie landmeetkundige hoofdstukken wilde bereiken mijns inziens breder dan enkel landmeters. Ook de liefhebber met voldoende verstand van zaken kon profiteren van Van Ceulens uitleg van het gebruik van de tabellen.

De vraag die nu nog rest is waarom Van Ceulen retorisch gezien toch zoveel nadruk legt op de praktische toepasbaarheid voor de landmeetkunde. Over het antwoord op deze vraag kan ik helaas niet meer dan speculeren. Vergelijkend onderzoek met de rest van de hoofdstukken uit *Vanden Circkel*, de rest van het werk van Van Ceulen en het werk van zijn collega-wiskonstenaars kan hier wellicht meer uitsluitsel over geven. Toch wil ik hier graag een aantal mogelijke antwoorden aandragen, zoals ik deze gaandeweg mijn onderzoek ben tegengekomen. Allereerst is het zo dat in de zestiende eeuw de theoretische en praktische kant van de wetenschap veel minder strikt gescheiden waren dan tegenwoordig het geval is. Wel bestond er een onderscheid tussen de *mathematica pura* (pure, abstracte wiskunde) en de *mathematica mixta* (wiskunde die in contact stond met hemel en aarde). Zoals uit het derde hoofdstuk van mijn scriptie blijkt, geldt dat het onderzoek naar de goniometrische tabellen voornamelijk voortgekomen is uit de praktische problemen die astronomen, en de daarmee verbonden toentertijd zeer respectabele astrologen, ondervonden. Alhoewel sommige bijdragen wat betreft de tabellen zeer theoretisch van aard lijken, betoogt Van Brummelen dat zeker tot en met de zestiende eeuw praktische motieven aan de basis lagen van de inspanningen van de wiskundig-astronomen. Dit betekent dat de tabellen voornamelijk binnen de *mathematica mixta* werden bestudeerd. Interessant in dit kader is dat de tabellen in *Vanden Circkel* het domein van de *mathematica mixta* niet geheel verlaten, alhoewel Van Ceulen een zeer theoretische werkwijze hanteert. Net als astronomie behoorde namelijk ook de landmeetkunde tot de *mathematica mixta*. Een verdienste van Van Ceulen is wel dat hij in *Vanden Circkel* de theorie en het gebruik van de tabellen in zijn geheel uit de sfeer van de astronomie plaatst en binnen de sfeer van de landmeetkunde brengt. Hij doet dit vermoedelijk zelfs heel letterlijk door tabellen over te nemen uit astronomische boeken van Clavius en Lansberg en die een plaats te geven in het landmeetkundige gedeelte van *Vanden Circkel*. Op deze manier heeft hij bijgedragen aan het uitbreiden van de mogelijkheden van het werken met de tabellen binnen de *mathematica mixta*, zonder echter de tabellen naar het domein van de *mathematica pura* over te hevelen. Het is zeer goed mogelijk dat aan het eind van de zestiende eeuw de stap naar een puur theoretisch vertoog te groot was.

Dit antwoord is voornamelijk vanuit de wetenschapper Van Ceulen met zijn zestiende-eeuwse paradigma geredeneerd. Het is echter ook verleidelijk om te denken dat voor Van Ceulen deze stap wellicht niet te groot was, maar dat hij met zijn boek in wilde spelen op trends vanuit de maatschappij. Het gebruik van goniometrische tabellen in de landmeetkunde kwam namelijk langzaam in zwang in de laatste decennia van de zestiende eeuw (Helmreich gebruikt ze bijvoorbeeld al in zijn werk uit 1591). Het is mijns inziens heel aannemelijk om te denken dat Van Ceulen dit aangreep om zijn vrij theoretische werk over cirkels een maatschappelijk actuele relevantie te geven. Op deze manier rechtvaardigt Van Ceulen zijn werkzaamheden en speelt hij bovendien in op een vraag van de maatschappij. Het zou immers goed kunnen dat bij de beslissing van Van Ceulen om de landmeetkunde zoveel nadruk te geven (vooral in zijn voorreden en op het titelblad) ook economische motieven meespeelden.

Een derde mogelijkheid, die de overige mogelijkheden overigens niet uitsluit, is dat Van Ceulen al op de hoogte was van de plannen van Prins Maurits om een Nederlandstalige ingenieursschool te stichten. Maurits was zelf erg praktisch ingesteld, maar zag ook de meerwaarde van een gedegen theoretische onderbouwing. Het zou kunnen dat Van Ceulen met dit werk een soort visitekaartje wilde afleveren, hetzij voor hemzelf, hetzij voor de Duytsche Mathematique. Of was het boek wellicht voor Van Ceulen een voorbereiding op zijn te geven lessen aan de Mathematique?

Dat Van Ceulen een breder publiek beoogde dan enkele Nederlandse praktijkgerichte landmeters lijkt mij inmiddels zeer plausibel. Waarom hij dan geen compleet theoretische verhandeling schreef, maar zijn opgaven en bovenal het nuttige aspect van zijn werk zo duidelijk in de landmeetkunde situeerde, is heel wat minder helder. Helaas kunnen we het hem, in zijn vierhonderdste sterfjaar, niet meer vragen. Aan de andere kant geeft dit ons de mogelijkheid om te speculeren over zijn beweegredenen en de hieruit voortkomende interessante hypothesen te toetsen. En dat is toch eigenlijk veel spannender dan het verkrijgen van een rechtstreeks antwoord.

7 Literatuur

Alberts, G., E. Atzema en J. van Maanen (1999). 'Mathematics in the Netherlands: A Brief Survey with an Emphasis on the Relation to Physics, 1560-1960'. In: Berkel, K. van, A. van Helden en L.C. Palm (ed.) *A history of science in the Netherlands: survey, themes and reference.* Leiden: Brill, pp. 367 - 406.

Berkel, K. van, A. van Helden en L.C. Palm (1999). *A history of science in the Netherlands: survey, themes and reference.* Leiden: Brill.

Braunmühl, A. von (1900). *Vorlesungen über Geschichte der Trigonometrie.* Niederwalluf bei Wiesbaden: Sändig. (Facsimile herdruk 1971)

Brummelen, G. van (2009). *The mathematics of the heavens and the earth. The early history of trigonometry.* Princeton en Oxford: Princeton University Press.

Ceulen, L. van (1596). *Vanden Circkel.* Delft: Jan Andriesz.
Ook te raadplegen via: http://www.ludolphvanceulen.nl/site/vandencirckel.php

Clavius, C. (1586). *Theodosii Tripolitae Sphaericorum libri III.* Rome.

Dijksterhuis, E.J. (1929). *De Elementen van Euclides.* dl. 1 en 2. Groningen: Noordhoff.

Heath, T.L. (1931). *A manual of Greek mathematics.* New York: Dover Publications. (Herdruk 1963)

Helmreich, A. (1591). *Von Feldmessen nach der Geometrei.* Leipzig.

Katscher, F. (1979). *Einige Entdeckungen über die Geschichte der Zahl Pi sowie Leben und Werk von Christoffer Dybvad und Ludolf van Ceulen.* Wenen: Springer.

Lansberg, Ph. van (1591). *Triangulorum Geometriae Libri Quator.* Middelburg.

Launert, D. (2007). *Nicolaus Reimers Ursus. Stellenwertsystem und Algebra in der Geodaesia und Arithmetica.* Munchen: Verlag der Bayerischen Akademie der Wissenschaften.

Pouls, H.C. (1997). *De Landmeter. Van de Romeinse tot de Franse tijd.* Alphen aan den Rijn: Canaletto/Repro-Holland.

Sems, J. en J.P. Dou (1600). *Practijck des lantmetens.* Leiden: Jan Bouwensz.

Stipriaan, R. van (2002). *Het volle leven. Nederlandse literatuur en cultuur ten tijde van de Republiek (circa 1550-1800).* Amsterdam: Prometheus.

Wepster, S. (2010a). 'Hoe Van Ceulen π insloot'. In: *Pythagoras* 49.3, pp. 26 - 28.

Wepster, S. (2010b). 'Ludolph van Ceulen in Hollandse kringen'. In: *Nieuw Archief voor Wiskunde* V.11.1, pp. 63 - 69.

Woordenboek der Nederlandsche Taal (WNT), te raadplegen via: http://gtb.inl.nl

8 Bijlage

De benodigde stellingen uit de *Elementen* van Euclides[68]

EL.I:47 (Stelling van Pythagoras)

In rechthoekige driehoeken is het vierkant op de zijde die de rechte hoek onderspant gelijk aan de vierkanten op de zijden die de rechte hoek insluiten.

EL.III:21

In een cirkel zijn de hoeken in hetzelfde segment aan elkaar gelijk.

EL.III:35

Als in een cirkel twee rechten elkaar snijden, is de rechthoek omvat door de delen van de ene rechte, gelijk aan de rechthoek omvat door de delen van de andere rechte.

EL.V:15

Als een eerste grootheid tot een tweede dezelfde verhouding heeft als de derde tot de vierde, en de eerste grootheid groter is dan de derde, dan zal ook de tweede groter zijn dan de vierde. Wanneer de eerste grootheid gelijk is aan de derde, dan zal ook de tweede gelijk zijn aan de vierde en wanneer de eerste grootheid kleiner is dan de derde, dan zal ook de tweede kleiner zijn dan de vierde.

EL.VI:19

Gelijkvormige driehoeken staan tot elkaar als het vierkant op een zijde van de ene driehoek tot het vierkant op de overeenkomstige zijde van de andere driehoek.

EL.VI:20

Gelijkvormige veelhoeken worden opgedeeld in een gelijk aantal gelijkvormige driehoeken, welke evenredig zijn met de gehele veelhoeken. Bovendien staat de ene veelhoek tot de andere veelhoek als het vierkant op een zijde van de ene veelhoek tot het vierkant op de overeenkomstige zijde van de andere veelhoek.

EL.XII:2

Cirkels staan tot elkaar als de vierkanten op de diameters.

[68] Gebaseerd op Dijksterhuis (1929)