Leermeester en leerling in gesprek:

VAN CEULEN'S EN SNELLIUS' FUNDAMENTA ARITHMETICA ET GEOMETRICA

[Liesbeth C. de Wreede]

1. Inleiding

1.1. Een dialoog

De bekendste leerling van Ludolph van Ceulen, de grote rekenmeester met wie u al eerder kennis gemaakt heeft, was Willebrord Snellius. Tegenwoordig is Snellius vooral bekend vanwege zijn ontdekking van de brekingswet van licht en zijn landmeetkundige werk. Hij was echter ook geïnteresseerd in de zuivere wiskunde, vooral in het oplossen van meetkundige problemen. Van Ceulen is zijn leermeester geweest op dat gebied. Over zijn lessen en hun latere samenwerking is niet zoveel bekend. Het boek *Fundamenta Arithmetica et Geometrica* biedt ons echter toch een kijkje in hun studeerkamers. Dit werk, Snellius' vertaling en bewerking van Van Ceulen's *Arithmetische en Geometrische Fondamenten*, is een prachtige en rijke bron, niet alleen om iets te weten te komen over de meetkundige problemen waaraan Van Ceulen en Snellius samen en ieder voor zich aan werkten, maar ook voor het begrijpen van de moeilijkheden die Van Ceulen, Snellius en hun tijdgenoten ondervonden bij hun pogingen getallen en meetkundige grootheden met elkaar te verbinden.
In dit artikel zal ik eerst Snellius voorstellen en hem vergelijken met Van Ceulen, vervolgens de inhoud en bedoeling van zowel de Nederlandse *Fondamenten* als de Latijnse *Fundamenta* bespreken en dan een voorbeeld geven waaruit Snellius' en Van Ceulen's verschillende aanpak van hetzelfde probleem blijkt.[1]

1.2. De hoofdrolspelers

Willebrord Snel van Royen (Snellius), 1580-1626

Zowel de *Fundamenta* als de *Fondamenten* verschenen in 1615. Op dat moment was Snellius (1580-1626) buitengewoon hoogleraar in de wiskundige wetenschappen aan de Leidse universiteit, het bolwerk van laathumanistische geleerdheid. Hij was zijn vader, Rudolf Snellius, de eerste hoogleraar wiskunde aan de Leidse universiteit, opgevolgd, na jarenlang zijn assistent te zijn geweest (ook toen waren vaste aanstellingen aan de universiteit schaars). Rudolf, overleden in 1613, lijkt een bekwaam docent te zijn geweest, maar hij was geen wiskundig specialist. Dat was ook niet nodig in zijn positie: een hoogleraar was in principe een docent, geen onderzoeker. In

Leiden stond onderzoek echter in hoger aanzien dan aan andere universiteiten en de jonge (Snellius) ging meer de diepte in dan zijn vader. Daarvoor had hij niet alleen inzicht, maar ook veel kennis nodig: de wiskundige wetenschappen omvatten toen alles wat maar enigszins kwantitatief was, en Snellius publiceerde dan ook over meetkunde, rekenkunde, navigatie, landmeetkunde, astronomie en zelfs over geld uit de Oudheid.
De wiskunde was in Snellius' tijd nog heel diep geworteld in de klassieke traditie, en het kwam dus goed uit dat Snellius goed Latijn en Grieks kende en goed op de hoogte was van relevante werken uit de Oudheid. Zijn belangrijkste leermeester daarbij was Josephus Justus Scaliger geweest, een humanistisch geleerde van topniveau die helaas zijn eigen capaciteiten op wiskundig vlak schromelijk overschatte en daardoor botste met Snellius' andere leermeester, Van Ceulen.
Van Ceulen (1540-1610) was een generatie ouder dan Snellius. In tegenstelling tot Snellius had hij geen toegang tot de klassieke bronnen, omdat hij geen Latijn en Grieks kende. Dit compenseerde hij echter met grote creativiteit en een ongeëvenaarde rekenlust. Van Ceulen concentreerde zich op de zuivere wiskunde, terwijl Snellius ook de gemengde wiskunde bestudeerde (waarin voorwerpen uit de werkelijkheid geteld of gemeten worden). Beiden waren in hun tijd gerespecteerde experts, die af en toe ook voor commissies gevraagd werden. Een andere belangrijke overeenkomst tussen hen is dat beiden op de bres stonden voor goede wiskunde en publiekelijk tekeer gingen tegen wat zij onder slechte wiskunde verstonden. Terwijl Van Ceulen zich druk maakte over foutieve bepalingen van π, was Snellius vooral gespitst op het juiste gebruik van concepten, en vooral op het uit elkaar houden van meetkundige en rekenkundige grootheden.

2. De *Fundamenta* als weerslag van de dialoog

2.1. Achter de schermen

Oude boeken hebben vaak meer te vertellen dan alleen hun inhoud. Dat geldt ook voor het duo *Fundamenten/Fundamenta*. Beide boeken verschenen in 1615, vijf jaar na Van Ceulen's overlijden. Niet hijzelf nam dus het initiatief tot publicatie, maar zijn weduwe, Adriana Simons. Zij vroeg Snellius het werk in het Latijn te vertalen. Beiden hadden naast Van Ceulen's belang ook dat van henzelf op het oog. Simons schreef maar liefst drie opdrachtbrieven bij de *Fondamenten* aan verschillende machtige heren, in de hoop op een ruime vergoeding van hun kant. Ze wilde ook nog de Latijnse editie opdragen aan de Staten Generaal. Dit leidde tot ergernis bij Snellius, die het werk wilde opdragen aan zijn vriend en ver familielid Aemilius Rosendalius, een machtig man van wie Snellius hulp verwachtte bij het beklimmen van de carrièreladder. Snellius wilde namelijk *ordinarius* worden, gewoon hoogleraar, en hetzelfde gaan verdienen als zijn vader aan het eind van zijn leven verdiend had, geen overbodige luxe voor de huisvader van een steeds groter gezin.[2]
Zonder voorspraak van een beschermheer was het moeilijk zoiets voor elkaar te krijgen. Uiteindelijk namen zowel Simons als Snellius een opdrachtbrief in het boek op. Dit leverde Simons 72 gulden op en Snellius een promotie tot gewoon hoogleraar.

2.2. Vertaling of bewerking?

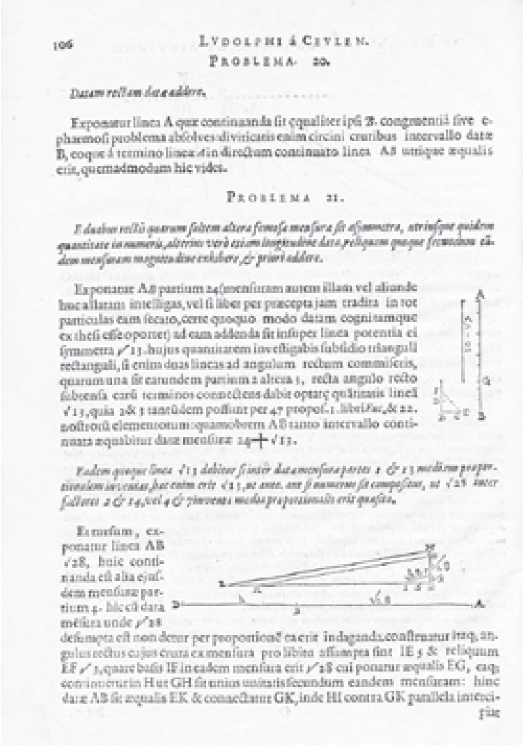
Beide versies van het boek moesten onder grote tijdsdruk worden afgemaakt. De uitgever maakte blijkbaar haast om het boek in de markt te zetten. Dit is te zien aan de zetfouten en andere slordigheden in beide talen. Ook moest Snellius voor zijn vertaling genoegen nemen met de figuren van het Nederlandse boek, zodat er soms Nederlandse woorden in de Latijnse editie te lezen zijn. Vervelender nog was het dat hij door dat gebrek aan nieuwe figuren zijn eigen verbeteringen en toevoegingen niet goed uit de doeken kon doen. Snellius stak zijn ergernis hierover niet onder stoelen of banken, zodat we hem bijna 400 jaar na dato nog kunnen horen mopperen op de drukkers. Hieruit blijkt wel dat hij geen onzichtbare vertaler was, maar ook zelf zijn stempel op het boek wilde drukken.
Er zijn dan ook heel wat verschillen tussen de twee edities te vinden. Snellius verbeterde een aantal foutjes in de Nederlandse versie, die waarschijnlijk door iemand met minder verstand van wiskunde dan Snellius voor de druk klaargemaakt is. Ook maakte hij alvast reclame voor zijn eigen werk. Het belangrijkste verschil tussen de Nederlandse en Latijnse editie is echter dat Snellius het boek geschikt maakte voor een internationaal geleerd publiek. Dit deed hij op drie manieren.
In de eerste plaats voegde hij een zeer geleerde opdrachtbrief toe, waarin hij op subtiele wijze liet zien dat zowel Van Ceulen als hijzelf niet 'van de straat was', maar dat hun werk in de zeer respectabele klassieke traditie paste. Hij besteedde speciaal aandacht aan de verdediging van Van Ceulen's gebruik van getallen in de meetkunde. Dit zou door de lezers gezien kunnen worden als een triviaal rekenmeesterstrucje, en daarom probeerde Snellius te laten zien dat dit wel degelijk een klassieke grondslag had.
Ten tweede reorganiseerde Snellius de inhoud van de *Fondamenten* zodat ze meer op Euclides' *Elementen* gingen lijken. Van Ceulen gaf namelijk vooral specifieke voorbeelden zonder de problemen algemeen te formuleren. Snellius formuleerde de problemen wel in algemene termen, waarbij hij dicht bij de Euclidische terminologie bleef.
Ten derde voegde Snellius op een aantal plaatsen commentaren toe aan Van Ceulen's tekst. Daar valt het boek echt te lezen als een dialoog tussen de dode Van Ceulen en de levende Snellius. Snellius vulde Van Ceulen's werk aan, bijvoorbeeld door een bewijs te geven dat Van Ceulen weggelaten had, en leverde ook kritiek, bijvoorbeeld op Van Ceulen's slordige bewijs van de Stelling van Heron. Hieronder wordt een voorbeeld van zo'n commentaar in meer detail besproken.

3. Optellen van segment-getal-paren

3.1. Getallen in de meetkunde: obstakels

In de tijd van Snellius en Van Ceulen was het oplossen van meetkundige problemen een populaire bezigheid onder wiskundigen. Sommigen van hen maakten gebruik van getallen en algebra. Dit was controversieel, omdat Snellius en andere tijdgenoten bezwaren hadden tegen het koppelen van een getal aan een lijnsegment of oppervlakte. Voor moderne lezers, gewend als we zijn aan analytische meetkunde, is die huivering moeilijk na te voelen. Toch hadden de scrupuleuze vroegmoderne wiskundigen wel een punt.[3]
Hun belangrijkste moeilijkheden waren de volgende:

1. Getallen werden traditioneel niet gebruikt in de meer theoretische meetkunde, wat tot een zeker argwaan leidde bij die wiskundigen die sterk aan de klassieke traditie hingen.
2. Er was geen natuurlijke kandidaat voor de eenheid in de meetkunde, dat wil zeggen een lijnstuk met dezelfde functie als het getal 1.
3. In de rekenkunde ontbreken dimensies. Om die reden kun je zo veel getallen met elkaar vermenigvuldigen als je wilt,



106 LVDOLPHI à CEVLEN.
PROBLEMA 20.

Datam rectam datæ addere.

Exponatur linea A quæ continuanda sit æqualiter ipsi B. congruentia sive epharmosi problema absolves: diviricatis enim circini cruribus intervallo datæ B, eoque à termino lineæ A in directum continuato linea AB utrique æqualis erit, quemadmodum hic vides.

PROBLEMA 21.

E duabus rectis quarum saltem altera sive sua mensura sit asymmetra, utriusque quidem quantitate in numeris, alterius verò etiam longitudine data, reliquam quoque secundum eandem mensuram magnitudine exhibere, & priori addere.

Exponatur AB partium 24 (mensuram autem illam vel aliunde huc allatam intelligas, vel si liber per præcepta jam tradita in tot particulas eam secato, certe quoquo modo datam cognitamque ex thesi esse oportet) ad eam addenda sit insuper linea potentia ei symmetra √13. hujus quantitatem investigabis subsidio trianguli rectanguli, si enim duas lineas ad angulum rectum commiseris, quarum una sit earundem partium 2 altera 3, recta angulo recto subtensa earū terminos connectens dabit optatę quātitatis lineā √13, quia 2 & 3 tantūdem possunt per 47 propos. 1. libri Euc. & 22. nostrorū elementorum: quamobrem AB tanto intervallo continuata æquabitur datæ mensuræ 24 + √13.

Eadem quoque linea √13 dabitur si inter datæ mensuræ partes 1 & 13 mediam proportionalem invenias, hæc enim erit √13, ut ante. aut si numerus sit compositus, ut √28 inter factores 2 & 14, vel 4 & 7 inventa media proportionalis erit quæsita.

Et rursum, exponatur linea AB √28, huic continuanda est alia ejusdem mensuræ partium 4. hic cū data mensura unde √28 desumpta est non detur per proportionē ea erit indaganda. constituatur itaq; angulus rectus cujus crura ex mensura pro libitu assumpta sint IE 5 & reliquum EF √3, quare basis IF in eadem mensura erit √28 cui ponatur æqualis EG, eaq; continuetur in H ut GH sit unius unitatis secundum eandem mensuram: hinc datæ AB sit æqualis EK & connectatur GK, inde HI contra GK parallela interse-

figuur 1 Uit: Van Ceulen's *Fundamenta Arithmetica et Geometrica*

en het resultaat is dan nog steeds een getal. In de meetkunde is rechthoekvorming de operatie die het dichtst bij vermenigvuldigen in de buurt komt. Die operatie vermeerdert echter het gevormde object met telkens een dimensie. Aangezien een object van meer dan drie dimensies onvoorstelbaar was in de klassieke meetkunde, was dit een serieus probleem.

4. Het incommensurabiliteitsprobleem: alleen als twee lijnsegmenten commensurabel zijn – dat wil zeggen dat er een grootheid bestaat waarvan ze beide veelvouden zijn – kunnen ze beide door een rationaal getal worden uitgedrukt. Het was niet duidelijk hoe het verband tussen incommensurabele grootheden kon worden uitgedrukt.
5. Goede bewijstechnieken ontbraken in de arithmetica, wat deels veroorzaakt werd door de afwezigheid van het concept van een onbepaald getal.

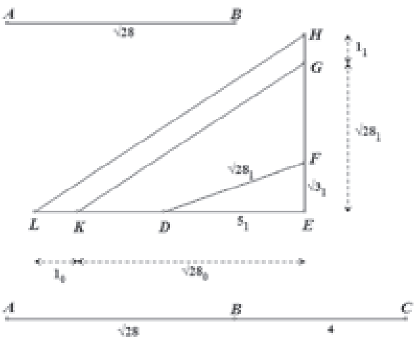
Deze bezwaren werden vaak niet expliciet opgeschreven door vroegmoderne wiskundigen, maar werden wel gevoeld. Laten we kijken hoe Van Ceulen en Snellius probeerden iets daarvan aan te pakken.

3.2. Getallen in de meetkunde: oplossingen

Van Ceulen legde in de *Fondamenten* uit hoe je kunt optellen, aftrekken, vermenigvuldigen en delen met paren van een lijnsegment en een getal. Als voorbeeld beschouwen we zijn optelling van twee van zulke paren; ***zie figuur 1***.[4] Wat wel en geen getal is, wordt niet expliciet gedefinieerd; impliciet worden alleen gehele getallen, breuken en (samengestelde) vierkantswortels als getallen beschouwd, alle positief. Als een eenheidslijnsegment gegeven is, kunnen lijnsegmenten van al deze lengtes met alleen passer en liniaal, de voorkeursinstrumenten van de meetkundige, geconstrueerd worden. Van Ceulen laat hier in feite het tegenovergestelde zien: hoe een eenheidsmaat te construeren op basis van een lijnstuk waarvan de lengte gegeven is als getal. Het probleem is als volgt:

Probleem 1. *Gegeven een lijnstuk AB waarvan gegeven is dat de lengte* $\sqrt{28}$ *is. Construeer een lijnstuk AC met lengte* $\sqrt{28}+4$.

Dit probleem ziet er misschien eenvoudig uit, maar het is helemaal niet triviaal. Het zou triviaal geweest zijn als Van Ceulen gevraagd had twee lijnsegmenten samen te voegen, of twee getallen bij elkaar op te tellen, of die som te benaderen met behulp van een breuk. Hier echter wordt het antwoord gegeven door een met passer en liniaal geconstrueerd lijnsegment, maar het is toch geen klassiek meetkundig probleem omdat getallen een essentiële rol spelen in de opgave. De moeilijkheid zit erin dat je wel een lijnstuk van $\sqrt{28}$ hebt, maar niet van 1 (of een andere rationale lengte), wat het lastig maakt een lijnstuk van lengte 4 te construeren. Van Ceulen pakt dit aan door een hulpeenheid te introduceren en op basis daarvan een eenheid te construeren op dezelfde schaal als de gegeven $\sqrt{28}$. Voor moderne lezers is het handig de eenheid waarin $\sqrt{28}$ uitgedrukt wordt, van deze hulpeenheid te onderscheiden in de notatie. We noemen ze respectievelijk 1_0 en 1_1. Van Ceulen maakt dit expliciete onderscheid niet.



figuur 2 Van Ceulen: optellen van lijnstukken

Zijn oplossing ziet er als volgt uit (***zie figuur 2***).

Constructie.

1. Trek een lijnsegment *DE* van willekeurige lengte; noem dit 5 eenheden (dit zijn hulpeenheden, dus 5_1).
   Construeer een lijnsegment *EF* van lengte $\sqrt{3}_1$ loodrecht op *DE* door *E*. (Van Ceulen legt niet uit hoe je *EF* moet vinden. Je kunt dit bijvoorbeeld doen door de stelling van Pythagoras toe te passen op een rechthoekige driehoek met aanliggende zijde 1_1 en schuine zijde 2_1; de overstaande zijde heeft dan lengte $\sqrt{3}_1$.)
2. Verbind *D* en *F*; deze schuine zijde heeft lengte $\sqrt{28}_1$.
3. Verleng *EF* tot *G* zodat $EG = \sqrt{28}_1$. Verleng *EG* tot *H* zodat $GH = 1_1$.
4. Verleng *ED* tot *K* zodat $EK = AB = \sqrt{28}_0$. Construeer de driehoek *GEK*.
5. Construeer een lijn parallel aan *GK* door *H*; noem het snijpunt met het verlengde van *EK L*. Nu geldt $KL = 1_0$.
6. Verleng *AB* met vier keer *KL* tot *C*. *AC* lost het probleem op.

Het bewijs volgt direct uit de gelijkvormigheid van de driehoeken *KEG* en *LEH*, die impliceert dat $EG : GH = EK : KL = \sqrt{28}_1 : 1_1 = \sqrt{28}_0 : 1_0$.

Hoewel de constructie zelf eenvoudig is, is er toch één complicatie: het is niet altijd eenvoudig om een gegeven getal (in dit geval $\sqrt{28}$) in een eindig aantal stappen te 'ontbinden' in eenheden via het herhaald toepassen van de stelling van Pythagoras en de constructie van rechthoekige driehoeken met behulp van passer en liniaal. Een vaardig breukenrekenaar als Van Ceulen zag natuurlijk direct welke combinaties voor de hand lagen, maar dat gold niet voor al zijn lezers.

Snellius stelde dan ook een andere oplossing voor, die deze moeilijkheid niet bevatte en waarvoor hij ook geen hulpeenheid hoefde te introduceren. Hij stelde voor om de middenproportionaal tussen $\sqrt{28}$ en $\frac{1}{28}\sqrt{28}$ te construeren. Dit is de eenheid, omdat $\sqrt{28} : 1 = 1 : \frac{1}{28}\sqrt{28}$. Hoe de middenproportionaal van gegeven lijnstukken bepaald kon worden, was te vinden in Euclides' *Elementen*, VI-13.

Snellius beval zijn eigen oplossing aan als een 'zeer elegante en erg makkelijke methode', die kon helpen Van Ceulen's omslachtige methode te omzeilen. Hij eindigde echter bescheidener door op te merken dat de lezer zelf uit moest maken welke van de twee methodes het handigste was. Op grond van de aangedragen voorbeelden is dit eigenlijk niet mogelijk. Van Ceulen en Snellius generaliseren beiden niet, maar geven alleen voorbeelden met concrete getalwaarden. Welk van de twee methoden makkelijker is, hangt erg van het concrete probleem af. Uiteindelijk gaat het hun beiden niet om snelheid, maar om de principiële oplossing van een theoretisch probleem: is het mogelijk exacte constructies uit te voeren met segment-getal-paren? Het antwoord is voor beiden ja. De constructies hoefden dan niet feitelijk steeds uitgevoerd te worden in nieuwe problemen. De lezer mag uitmaken welke methode hij of zij het 'elegantst' vindt, dat antwoord ligt niet in de wiskunde besloten.

4. Conclusie

Van Ceulen en Snellius vertegenwoordigen verschillende scholen in de vroegmoderne wiskunde: Van Ceulen was een rekenmeester, Snellius een academisch/humanistisch wiskundige. Ze kwamen elkaar tegen in hun belangstelling voor meetkunde. Daarin legden ze echter andere accenten, zoals heel duidelijk blijkt uit hun beider inbreng in de *Fondamenten*/*Fundamenta*. Van Ceulen pakte nieuwe problemen aan, die hij creatief oploste. Hij rekende graag met ingewikkelde wortels. Snellius was wat voorzichtiger, hij vond het belangrijk dat de grondslagen van de meetkunde niet in gevaar kwamen door innovaties. Bovendien was hij, doordrongen van humanistische geleerdheid vanaf zijn vroegste jeugd, meer gehecht aan de traditionele Euclidische benadering van de meetkunde. Ook moest hij rekening houden met zijn collega's aan de Leidse universiteit, waar zijn positie nog niet zeker was. Snellius diende dan ook zowel Van Ceulen's als zijn eigen belang door geen letterlijke vertaling van diens werk te maken, maar het werk te verbeteren en uit te breiden. Van deze dialoog tussen leermeester en leerling kunnen wij 400 jaar later nog steeds meegenieten.

Noten

[1] Dit artikel is gebaseerd op [g]. Voor meer achtergrondinformatie en andere voorbeelden van de dialoog Snellius-Van Ceulen zie mijn proefschrift [f].

[2] Volgens de meeste literatuur hadden Snellius en zijn vrouw achttien kinderen, maar die heb ik niet teruggevonden in de archieven. Daar zijn sporen van zeven kinderen te vinden; zie [f; pp. 65-66].
We zijn op de hoogte van Snellius' ergernis en zijn hulpverzoek aan Rosendalius dankzij een overgeleverde brief van Snellius, die zich nu in de universiteitsbibliotheek van Utrecht bevindt; zie [a].

[3] Voor meer achtergrondinformatie en scherpe analyses zie [d].

[4] Zie [b; pp. 132-134] en [c; pp. 106-109].
Dit voorbeeld is ook heel geschikt om in de klas te behandelen. Zie de mooie uitleg en opgaven in [e; pp. 13-16]; in het boekje worden ook aanverwante onderwerpen behandeld.

Bibliografie

Manuscripten

[a] W. Snellius (1615?): *Brief aan Aemylius Rosendalius (quamvis)*. UBU HS 986/7.A.26, Aem. et Jac. Rosendalius fratres, Epistolae autographae et epistolae diversorum ad eosdem, cum carminibus nonnullis, Thesibus ab iis defensis, cet., 1574-1616, fol. 224^{r-v}.

Primaire bronnen

[b] L. van Ceulen (1615): *De Arithmetische en Geometrische fondamenten, Met het ghebruyck van dien in veele verscheydene constighe questien, soo Geometrice door linien, als Arithmetice door irrationale ghetallen, oock door den regel Coss, ende de tafelen sinuum ghesolveert*. By Ioost van Colster, ende Iacob Marcus, Tot Leyden.

[c] L. van Ceulen (1615): *Fundamenta Arithmetica et Geometrica cum eorundem usu In variis problematis, Geometricis, partim solo linearum, ductu, partim per numeros irrationales, et tabulas sinuum, et Algebram solutis. Authore Ludolpho a Ceulen Hildesheimensi. E vernaculo in Latinum translata a Wil. Sn. R. F.* Apud Iacobum Marcum Bibliopolam, Lugduni Batavorum.

Secundaire literatuur

[d] H.J.M. Bos (2001): *Redefining Geometrical Exactness / Descartes' Transformation of the Early Modern Concept of Construction*. New York: Springer (Sources and Studies in the History of Mathematics and Physical Sciences).

[e] M. de Nijs, S. Wepster (2010): *Meester Ludolphs Koordenvierhoek*. Utrecht: Epsilon Uitgaven (in samenwerking met de NVvW); te verschijnen.

[f] L.C. de Wreede (2007): *Willebrord Snellius (1580-1626): a Humanist Reshaping the Mathematical Sciences*. Proefschrift Universiteit Utrecht (*zie http://igitur-archive.library.uu.nl/dissertations/2007-0925-200740/*).

[g] L.C. de Wreede (2010): *A dialogue on the use of arithmetic in geometry: Van Ceulen's and Snellius's Fundamenta Arithmetica et Geometrica*. In: *Historia Mathematica* 37(3); te verschijnen.

Over de auteur

Liesbeth de Wreede werkt als biostatisticus in het Leids Universitair Medisch Centrum. Daarnaast is ze historicus van de wiskunde, gepromoveerd op een proefschrift over Willebrord Snellius.
E-mailadres: *L.C.deWreede@uu.nl*