Vijfendertig decimalen

[Jaap Top]

In 2010 is het 400 jaar geleden dat Ludolph van Ceulen overleed. Om verschillende redenen is het mooi om daar aandacht aan te besteden. Van Ceulen was een verwoed rekenaar die steevast 'met lust ende arbeyt' verder rekende waar anderen stopten. Doordat hij niet academisch geschoold was, nam hij niet altijd de meest voor de hand liggende weg; wel bedreef hij wiskunde van internationaal niveau. Er zijn inderdaad verschillende redenen waarom we van mening zijn dat Van Ceulen en zijn werk de moeite waard zijn om een serie artikelen aan te wijden. Zijn werk ademt steeds een werklustige frisheid, zijn wiskunde is vaak mooi en boeiend, en dat maakt het tot heel interessant materiaal om met leerlingen aan te werken. Het kijken naar de problemen waarmee wiskundigen in zijn tijd worstelden, geeft een verdieping aan de schoolwiskunde van nu. Daar komt nog bij dat Van Ceulen interessante, soms zelfs spetterende, relaties met zijn omgeving had en daardoor leren we dan weer iets over de tijd waarin hij leefde.
Al met al dus genoeg reden om u acht (nu nog vier) nummers lang te trakteren op Van Ceulen-verhalen, geschreven door diverse specialisten.

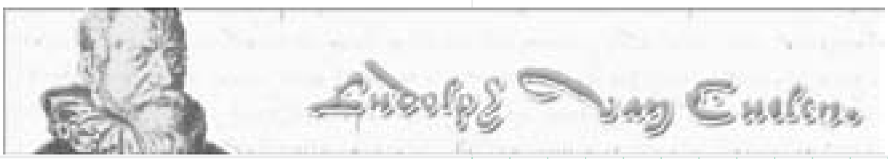
Inleiding

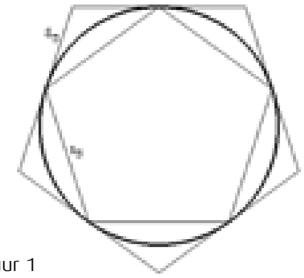
Op 2 januari 1611 werd in de Pieterskerk te Leiden Ludolph van Ceulen begraven. Hij was twee dagen eerder, oudejaarsdag 1610, overleden, 70 jaar oud. Rekenmeester en schermschoolhouder Van Ceulen is niet overleden aan wat D. Bierens de Haan in zijn *Bouwstoffen voor de geschiedenis der wis- en natuurkundige wetenschappen in de Nederlanden* noemt 'eene epidemie van cirkelquadraturen'. Maar dat hij ermee besmet was, is zeker.
Over Van Ceulen valt te zeggen, dat hij in het harnas is gestorven. Op 10 januari 1600 was hij op aanbeveling van prins Maurits benoemd tot professor in de 'Nederduytsche mathematicque', aan de zojuist ingestelde Leidse ingenieursopleiding waarvan het studieprogramma was bedacht door Simon Stevin. Maurits, uiteraard vanwege de oorlog met Spanje, zag er wel wat in dat 'in de universiteit alhyer soude worden gedoceert in goeder duytser tale die telkonste ende lantmeten, principalycken tot bevordering van de geenen die hen souden willen begeven tottet ingenieurscap'. Joannes Meursius schrijft in 1625, dat Van Ceulen deze baan elf volle jaren uitvoerde; dus dat moet hij dan tot heel kort voor zijn dood hebben gedaan. Diezelfde Meursius zegt (op pag. 345 van zijn *Athenae Batavae, sive De urbe Leidensi et academia, virisque claris, qui utramque ingenio suo, atque scriptis, illustrarunt, libri duo*) overigens, dat Van Ceulen overleed na lange tijd geleden te hebben aan een slopende kwaal.
Actief was Van Ceulen zeker nog in zijn laatste levensjaar: een boek van Dirck d'Hollander uit 1669 bevat twee brieven die Van Ceulen in maart en in mei 1610 aan een zekere Nicolaes Huybertsz. van Percijn stuurde. Naast wiskunde en schermen was er zijn gezin. Zelf had hij twaalf kinderen, en zijn vrouw Adriaantgen Simonsdr. bracht er uit een eerder huwelijk ook nog acht mee. Naast wiskundig werk is er een gedicht van Ludolph van Ceulen bewaard gebleven. Het werd in 1603 gepubliceerd in een boek van Christoffer Dybvad, waarin deze in vier delen de resultaten uit de *Elementen* van Euclides door middel van allerlei voorbeelden verduidelijkt.
Ondanks dit soort wapenfeiten dankt Van Ceulen zijn naamsbekendheid vooral aan het merkwaardige gegeven dat na zijn dood, een onder- en bovengrens voor π = 3,1415… op zijn grafsteen werden gebeiteld waarmee π tot op 35 decimale cijfers achter de komma wordt bepaald. Of hij dit helemaal alleen heeft uitgerekend, is niet belangrijk (een eerder huzarenstukje waarbij 32 cijfers achter de komma werden bepaald, volbracht hij met hulp van zijn leerling Pieter Cornelisz.). De grafsteen was tot in de 19e eeuw een van de toeristische attracties van de stad Leiden (***zie foto 1** op pag. 272*). Daarna verdween de steen; mogelijk omdat door slijtage de tekst niet meer leesbaar was. In het jaar 2000 onthulde prins Willem-Alexander een reconstructie van het oorspronkelijke grafschrift (***zie foto 2***). Deze prijkt levensgroot op een van de pilaren in de Leidse Pieterskerk; dus slijtage zal ditmaal hopelijk nog lang op zich laten wachten. De fascinerende geschiedenis van de grafsteen en de poging tot een reconstructie zijn te vinden in het artikel *Het grafschrift van Ludolph van Ceulen* dat in juni 2000 in het *Nieuw Archief voor Wiskunde* verscheen.[1]

De bedoeling van dit artikel is niet zoveel mogelijk trivia over Van Ceulen te verzamelen, en evenmin om hem in een historische context te plaatsen. Er is veel over hem geschreven, waarbij met name het uitvoerige overzichtsartikel van F. Katscher uit 1979, *Einige Entdeckungen über die Geschichte der Zahl Pi sowie Leben und Werk von Christoffer Dybvad und Ludolph van Ceulen*[2], zeer de moeite waard is.
We beperken ons hier tot een enkel, vrij simpel onderwerp: hoe bepaalde Van Ceulen zoveel decimalen van π, en waarom berekende hij steeds maar meer decimalen?

De methode van Archimedes

De klassieke methode om π te benaderen gaat terug tot tenminste Archimedes. Hierbij gaan we uit van een cirkel met straal 1. Neem een ingeschreven regelmatige n-hoek daarvan en ook een omgeschreven regelmatige n-hoek. De lengte van een zijde van de ingeschreven n-hoek noteren we als s_n, en die van de omgeschreven n-hoek als S_n (***zie figuur 1***).
Vergelijken van de omtrek van de cirkel met die van de ingeschreven n-hoek levert $2\pi > n\cdot s_n$, dus:
$\frac{1}{2}n\cdot s_n < \pi$
In navolging van Van Ceulen (Capittel IX in *Van den Circkel*, uit 1596) vergelijken we vervolgens de oppervlakte van de cirkel met die van de omgeschreven n-hoek. Dit geeft:
$\pi < n\cdot\frac{1}{2}S_n$
Hiermee hebben dus we zowel een onder-





figuur 1

grens als een bovengrens voor π.
Van Ceulen bewijst in Capittel II van het voornoemde boek dat je s_{2n} gemakkelijk kan uitrekenen als je s_n kent:

$$s_{2n} = \sqrt{2 - \sqrt{4 - s_n^2}}$$

Hij noemt dit het 'Fondament' van zijn theorie. Vanuit een wat moderner perspectief is dit fondament eenvoudig af te leiden: door de (gelijkbenige) driehoek te nemen met als hoekpunten het middelpunt van de cirkel plus twee eindpunten van een zijde van de ingeschreven n-hoek, volgt de formule:

$$s_n = 2\sin\frac{\pi}{n}$$

Van Ceulen's formule zegt dus dat:

$$2\sin\frac{\pi}{2n} = \sqrt{2 - \sqrt{4 - \sin^2\frac{\pi}{n}}}$$

en dat is eenvoudig na te gaan met de formules $\sin(2x) = 2\sin(x)\cos(x)$ en $\cos(x) = \sqrt{(1 - \sin^2(x))}$. Uiteraard is Van Ceulen's bewijs veel meetkundiger.

Wil je niet alleen een ondergrens voor π maar ook een bovengrens, dan is iets vergelijkbaars voor S_n handig. Ook dit is vanuit ons gezichtspunt prima te doen, want:

$$S_n = 2\tan\frac{\pi}{n}$$

zoals min of meer per definitie volgt.
Schrijven we:

$$\tan\frac{\pi}{n} = \frac{\sin\frac{\pi}{n}}{\cos\frac{\pi}{n}} = \frac{\sin\frac{\pi}{n}}{\sqrt{1-\sin^2\frac{\pi}{n}}}$$

dan leidt dit tot het verband:

$$S_n = \frac{2s_n}{\sqrt{4-s_n^2}}$$

wat door Van Ceulen op een eenvoudige meetkundige manier in Capittel IX wordt aangetoond.
Uitgaande van een waarde als $s_4 = \sqrt{2}$ of $s_3 = \sqrt{3}$ leveren bovenstaande formules steeds nauwkeuriger benaderingen. Van Ceulen trakteert zijn lezers op een flink aantal daarvan (met name in Capittel X en XI), waarbij hij behalve met s_3 en s_4, ook start met:

$$s_5 = \sqrt{\tfrac{5}{2} - \tfrac{1}{2}\sqrt{5}} \quad \text{en}$$

$$s_{15} = \sqrt{\tfrac{7}{4} - \sqrt{\tfrac{5}{16}} - \sqrt{\tfrac{15}{8} - \sqrt{\tfrac{45}{64}}}}$$

Het antwoord voor de vijfhoek en de vijftienhoek vinden we in Capittel V van *Van den Circkel*. De formule voor s_{15} is recent nog eens prachtig uitgelegd door Steven Wepster in het scholierenblad *Pythagoras* van januari 2010 (zie [3]).

Ter illustratie beginnen we hier met s_3:

n	s_n	S_n	$½n \cdot s_n$	$½n \cdot S_n$
3	1,732050808	3,464101616	2,598076212	5,196152424
6	1,000000000	1,154700539	3,000000000	3,464101616
12	0,5176380902	0,5358983848	3,105828541	3,215390309
24	0,2610523844	0,2633049952	3,132628613	3,159659942
48	0,1308062585	0,1310869256	3,139350203	3,146086215
96	0,06543816568	0,06547322086	3,141031953	3,142714601
192	0,03272346326	0,03272784428	3,141452473	3,141873051
384	0,01636227921	0,01636282681	3,141557609	3,141662748
768	0,008181208052	0,008181276500	3,141583892	3,141610176
1536	0,004090612584	0,004090621140	3,141590465	3,141597036
3072	0,002045307362	0,002045308432	3,141592108	3,141593752
6144	0,001022653814	0,001022653948	3,141592518	3,141592929
12288	0,0005113269238	0,0005113269406	3,141592620	3,141592723
24576	0,0002556634642	0,0002556634662	3,141592648	3,141592673
49152	0,0001278317322	0,0001278317325	3,141592652	3,141592658
98304	0,00006391586614	0,00006391586618	3,141592653	3,141592654

Zelfs een klein tabelletje als het bovenstaande illustreert al dat er behoorlijk gerekend moet worden om een benadering te krijgen die redelijk meedoet met wat een grafische rekenmachine probleemloos op het scherm tovert. Immers, een benadering waarvan de eerste m cijfers achter de komma correct zijn, betekent hier dat het verschil $½n(S_n - s_n)$ kleiner moet zijn dan 10^{-m}. Nu is dit verschil gelijk aan:

$$n(\tan\frac{\pi}{n} - \sin\frac{\pi}{n})$$

Dus met behulp van de benaderingen $\sin(x) \approx x - \frac{1}{6}x^3$ en $\tan(x) \approx x + \frac{1}{3}x^3$ voor x dicht bij 0, zien we dat:

$$n(\tan\frac{\pi}{n} - \sin\frac{\pi}{n}) \approx \frac{\pi^3}{2n^2}$$

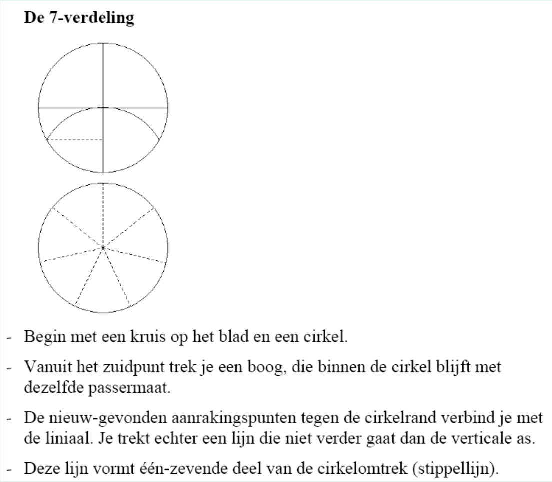
Met, als in bovenstaand voorbeeld, $n = 3 \cdot 2^k$ levert dit een verschil tussen onder- en bovengrens kleiner dan 10^{-9} als $k \geq 16$, wat prima overeenkomt met de tabel. En algemener zie je dat:

$$\frac{\pi^3}{2(3 \cdot 2^k)^2} \leq 10^{-d}$$

geldt vanaf een zekere k die groter is dan een zekere constante maal d. Met andere woorden, het aantal keren (k) dat het aantal zijden moet worden verdubbeld, hangt op een lineaire manier af van de gevraagde precisie (d). Bovendien, om deze precisie te bereiken dienen alle tussenresultaten ook in minstens diezelfde precisie te worden bepaald. Zoals we zagen, is daarbij het trekken van wortels een belangrijke stap. Willen we zo'n wortel in een zeker aantal decimalen precies, dan is het nodig om het getal waaruit de wortel wordt getrokken, in tweemaal zoveel decimalen te kennen.
Voor de berekening op Van Ceulen's grafsteen zal dan ook flink gerekend zijn met getallen die zo'n 70 decimalen achter de komma hebben. In werkelijkheid waren het er zelfs iets meer: Willebrord Snellius publiceerde in 1621 het boek *Cyclometricus, De Circuli dimensione secundum Logistarum abacos*, en daarin staat dat Van Ceulen begon met een vierkant ($n = 4$) en vervolgens zestig maal verdubbelde (dus hij stopte bij $n = 2^{62}$). Hij rekende daarbij de getallen s_4, s_8, … en S_4, S_8, … uit met een precisie van 75 decimalen.

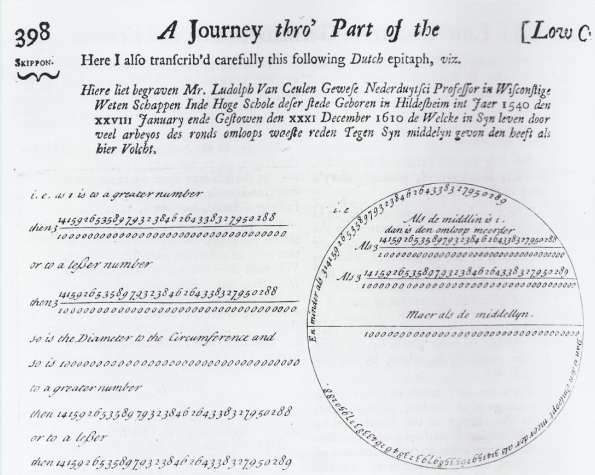
Waarom?

Het kan niet anders of Van Ceulen moet veel plezier in rekenwerk hebben gehad. Dat beaamt hij overigens zelf ook. Maar zelfs dan kan je je afvragen waarom hij niet stopte na tien, of hooguit twintig decimalen. Elke keer moest immers de berekening weer helemaal opnieuw, en de methode waarmee dat alles gebeurde, bleef onveranderd.
Historici mogen zich nog een tijdje over dit fanatisme buigen. Een indruk die zeker uit Van Ceulen's werk en zijn rol in zijn tijd naar voren komt, is dat hij min of meer natuurlijk in de positie van verdediger van correcte antwoorden en methoden terechtkwam. De al eerder genoemde 'epidemie van cirkelquadraturen' leidde tot een aantal rare fouten. Al was Van Ceulen de taal waarin de gevestigde wetenschappers met elkaar correspondeerden (het Latijn; [red.]) niet machtig, zijn antwoorden en tabellen kon iedereen lezen. Na twintig decimalen van π in *Van den Circkel* (1596) doet hij het nog eens over met 32 decimalen; zie pag. 163 van een ander boek van hem: *De Arithmetische en Geometrische fondamenten*, dat na zijn dood verscheen. Van Ceulen's vrouw schrijft voorin dat boek (1615): 'Soo hebbe ick het behoorlijck gheacht te wesen, zijn resterende werck, het welcke onder my is berustende, soo veel als moghelijck is, in het licht te brengen.'
Die 32 decimalen vond hij, zoals eerder gezegd, samen met een leerling van hem. Eentje minder, 31 dus, vinden we in het ook al eerder genoemde boek van Dybvad (1603), met de mededeling dat ze afkomstig zijn van Van Ceulen.


De 7-verdeling

- Begin met een kruis op het blad en een cirkel.
- Vanuit het zuidpunt trek je een boog, die binnen de cirkel blijft met dezelfde passermaat.
- De nieuw-gevonden aanrakingspunten tegen de cirkelrand verbind je met de liniaal. Je trekt echter een lijn die niet verder gaat dan de verticale as.
- Deze lijn vormt één-zevende deel van de cirkelomtrek (stippellijn).

figuur 2


398 A Journey thro' Part of the [Low C

SKIPPON.

Here I alſo tranſcrib'd carefully this following *Dutch* epitaph, *viz.*

Hiere liet begraven Mr. Ludolph Van Ceulen Geweſe Nederduytſci Profeſſor in Wiſconſtige Weten Schappen Inde Hoge Schole deſer ſtede Geboren in Hildeſheim int Jaer 1540 *den* XXVIII *January ende Geſtowen den* XXXI *December* 1610 *de Welcke in Syn leven door veel arbeyos des ronds omloops waeſte reden Tegen Syn middelyn gevon den heeft als hier Volcht.*

i. e. as 1 *is to a greater number*

then $3\frac{14159265358979323846264338327950288}{100000000000000000000000000000000000}$

or to a leſser number

then $3\frac{14159265358979323846264338327950288}{100000000000000000000000000000000000}$

so is the Diameter to the Circumference and

so is 100000000000000000000000000000000000

to a greater number

then 14159265358979323846264338327950288

or to a leſser

then 14159265358979323846264338327950289

foto 1 Transcriptie van het oorspronkelijke grafschrift (Ph. Skippon, 1732)

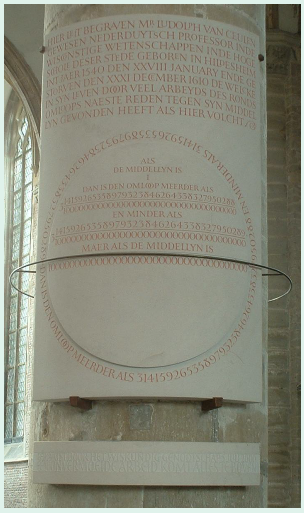


foto 2 De nieuwe gedenksteen ontworpen en vervaardigd door Cornelia Bakkum (foto: A.L. Boon)

Moest dat dan zo precies? Mogelijk kon hij op deze manier een resultaat van dominee Johan Philip Lansbergen controleren. Deze publiceerde 28 decimalen van π in zijn boek *Triangulorum geometriae libri quator*. De methode wijkt af van die van Van Ceulen. Het is wat onduidelijk wanneer het boek precies is verschenen (een datum die erin voorkomt, is 1604), maar zeker is wel dat Lansbergen het boek *Van de Circkel* citeert, en ook dat Van Ceulen Lansbergen noemt als een van de mensen die ook aan cirkelkwadratuur doet.

Niet lang na Van Ceulen's dood staat ook in het al eerder genoemde boek van Snellius een methode om π te benaderen, en zelfs eentje die aanzienlijk minder rekenwerk vergt. Zou Snellius, die Van Ceulen heel goed kende, die methode al veel eerder hebben gehad en zelfs aan Van Ceulen hebben verteld? Het is giswerk, maar het zou een verklaring kunnen geven waarom na al het gereken, ook nog eens de geslaagde recordpoging van 35 decimalen werd gedaan. Overigens, Snellius illustreerde zijn verbetering, door 34(!) decimalen van π te berekenen op een veel eenvoudiger manier dan Van Ceulen dat deed. Pas in 1630 verbrak de jezuïet Christoph Grienberger, met behulp van de methode van Snellius, het record van Van Ceulen: hij vond 38 decimalen.

Het kritisch toetsen van het werk van tijdgenoten, ook waar het de cirkelkwadratuur betreft, kan overigens nog steeds, en het levert een aardig onderwerp voor derde of vierde klassers. Na wat uitleg over de stelling van Pythagoras en de definitie en eerste eigenschappen van de sinus kunnen veel scholieren al wel nagaan dat hetgeen ***in figuur 2*** is gesteld, niet klopt. De figuur is overgenomen van pag. 144 uit een in 2003 verschenen boek van Greetje Molenaar (Uitgeverij Akasha, Eeserveen) over het tekenen van mandala's.

Uit *dit* voorschrift volgt dat $s_7 = ½\sqrt{3}$; dus $\sin(\pi/7) = ¼\sqrt{3}$. In werkelijkheid verschillen s_7 en $½\sqrt{3}$ pas in het derde cijfer achter de komma. Dus als mevrouw Molenaar en haar lezers met behulp van niet al te grote cirkels regelmatige 7-hoeken construeren, zal de fout nauwelijks zichtbaar zijn. En met geleerden als Scaliger (hij publiceerde in 1594 dat $\pi = \sqrt{10}$), Nicolaus Reimarus Ursus (hij beweerde in 1588, in navolging van Simon van der Eycke en anderhalve eeuw eerder al de Duitse geleerde Nicolaus Cusanus, dat $\pi = 2\sqrt{(2\sqrt{5} - 2)}$), doet mevrouw Molenaar het best redelijk: haar bewering leidt tot $\pi = 7\arcsin(¼\sqrt{3}) \approx 3{,}134826779$. Had ze Capittel XIV in *Van den Circkel* gelezen, dan zou ze hebben kunnen zien dat haar s_7 niet klopt. Aan het eind van dat hoofdstuk geeft Van Ceulen namelijk een tabel met daarin de waarden van s_n voor $3 \le n \le 80$, in 14 decimalen nauwkeurig. De tabel eindigt met de bescheiden uitspraak: 'Godt alleen de eer'. In de tabel vinden we dat:

$s_7 \approx 0{,}86776747823511$

terwijl geldt:

$½\sqrt{3} \approx 0{,}86602540378445$

Dank

Met dank aan StevenWepster voor zijn opmerkingen bij een eerdere versie van deze tekst.

Info

Zie verder ook: *www.ludolphvanceulen.nl*

Noten

[1] Dit artikel, geschreven door R.M.Th.E. Oomes, J.J.T.M. Tersteeg en J. Top, is elektronisch beschikbaar via *www.math.rug.nl/~top/graf.pdf* .

[2] In: *Denkschriften der mathematisch-naturwissenschaftlichen Klasse*, volume 116. Wien: Verlag der Österreichischen Akademie der Wissenschaften; pp. 85–129.

[3] Dit artikel is elektronisch beschikbaar via *www.ludolphvanceulen.nl/documents/Pythagoras-2010jan-SW.pdf* .

Over de auteur

Dr. Jaap Top is hoogleraar getaltheorie en algebraïsche meetkunde aan de Rijksuniversiteit Groningen. In 2000 organiseerde hij op initiatief van Hendrik Lenstra het evenement 'Pi in de Pieterskerk'.

E-mailadres: *j.top@rug.nl*