# Ludolph van Ceulen in de klas

[ Marjanne de Nijs, Margot Rijnierse ]

**Kriebels**
We staan al jaren als eerstegraads docent wiskunde met veel plezier voor de klas. Toch ging het een jaar of drie geleden kriebelen. We wilden meer verdieping, maar niet in de vorm van een korte nascholingscursus of professionaliseringsmodule. Na wat omzwervingen kwamen we terecht bij de Universiteit Utrecht. Daar zijn we toegelaten tot de *Masteropleiding Science Teacher Education*. Het eerste jaar volgden we vier vakken op masterniveau via de zogenaamde MasterMath-constructie [1].
De gevolgde colleges waren *Elliptic Curves* van Jaap Top, *Geschiedenis van de Wiskunde* van Steven Wepster, *Stochastiek* van Ronald Meester en *Geometry* gegeven door Aad Goddijn. Het was bijzonder inspirerend om deze lessen te volgen. Na het goed afronden van deze vakken zijn we gestart met ons onderzoek. Dit moest bestaan uit een didactische en wiskundige component.
In eerste instantie kozen we het verkeerde onderwerp. Blijkbaar gebeurt dit vaker, maar voor ons was het even slikken. Differentiaalvergelijkingen in het hbo zijn prachtig, maar wij sleurden ons met veel moeite aan de studie om onverrichter zake na twee maanden tot de conclusie te komen dat dit het niet zou worden. We wilden graag studeren en daar veel tijd en moeite in stoppen, maar het moest ons echt aanspreken en motiveren.
In die stemming gingen we langs bij onze begeleider, Steven Wepster. Hij wist wel een alternatief: Ludolph van Ceulen [2]. Iedereen die in de buurt van Steven kwam, werd met het Van Ceulen-virus besmet en wij vormden daarop geen uitzondering.
De opdracht die hij mee gaf, was bijzonder uitdagend: ‘Schrijf, op basis van het werk van Ludolph van Ceulen, lesmateriaal voor het havo/vwo van klas 1 tot en met klas 6. Zo kunnen vanaf 2010, het *Ludolph van Ceulen Jaar*, leerlingen van alle klassen iets van deze rekenmeester leren.’
Afgelopen februari was het zover: we (MdN en MR) presenteerden ons materiaal tijdens een workshop op de Nationale Wiskunde Dagen. Hierbij een overzicht.

**Muntenspel (MdN/MR)**
**klas 1 havo/vwo**
Vanaf onze eerste brainstorm over geschikt lesmateriaal hadden we al een spel in onze gedachten. We wilden een creatieve werkvorm waardoor de onderbouwklassen in 2010 kennis konden maken met Ludolph van Ceulen. Het is altijd gevaarlijk om eerst de vorm te kiezen en dan pas na te denken over de inhoud. Daarom heeft het lang geduurd voordat we werkelijk met dit idee aan de slag gingen.
In de herfst lazen we de tekst van Ludolph over het rekenen met munten. In zijn tijd waren er verschillende muntsoorten in omloop en voor veel mensen was het lastig om daarmee te rekenen.
In de *Aritmetische en Geometrische Fondamenten* [3] vonden we een omrekentabel voor Ponden, Schellingen, Groten en Mijten. Deze tabel werd de basis voor het *Ludolph van Ceulen Muntenspel*.
Het spel bestaat uit een spelbord en muntkaarten (***zie figuur 1***). Leerlingen krijgen een blad met de tabel van Ludolph en de spelregels. Met pionnen en het gooien van een dobbelsteen bewegen ze zich over het spelbord. Daar komen leerlingen allerlei opdrachten tegen waarbij ze muntkaarten verzamelen of kwijtraken. De bedoeling is dat ze met behulp van de muntkaarten en de omrekentabel *precies* 1 pond bij elkaar sparen. Dit kan bijvoorbeeld met de volgende kaarten: $\frac{1}{4}$ pond, $\frac{5}{12}$ pond, 8 groten en 6 schellingen.
Met het gespaarde pond kunnen ze een kaartje kopen voor de *Trekschuit*, een speelvlak op het spelbord. De schipper vaart ze naar Leiden, de laatste woonplaats van Ludolph. De eerste speler die daar is, mag zich winnaar noemen van het *Ludolph van Ceulen Muntenspel*. Spelenderwijs zijn leerlingen bezig met het rekenen met breuken. Het spel is snel uit te leggen en daardoor kunnen leerlingen vrijwel direct starten. Het is geschikt voor een lesuur vlak voor de vakantie of tussen twee hoofdstukken in. Ook is het een leuke opstartles voor het oefenen van breuken.

**Goochelen met oppervlaktes (MR)**
**2-havo/vwo**
Mijn oog viel op een propositie in de *Fondamenten* die ik erg grappig vond.
Van een willekeurige vierhoek maakt Van Ceulen een driehoek met een even grote oppervlakte, met een principe dat voor de leerlingen goed te begrijpen is (***zie figuur 2***). De oorspronkelijke figuur *ABCD* verandert hij in *ABE*. *ABCD* en *ABE* hebben een even grote oppervlakte. Hoe gaat dit in zijn werk? Trek de lijn *BD* en trek vervolgens vanuit *C* een lijn evenwijdig aan *BD* tot die lijn het verlengde van *AD* snijdt. Omdat *BD* en *CE* evenwijdig lopen, hebben driehoeken met als basis *BD* en het derde hoekpunt op *CE*, dezelfde basis en dezelfde hoogte en dus dezelfde oppervlakte.
Van Ceulen goochelt op verschillende manieren met oppervlaktes van driehoeken, rechthoeken en overige veelhoeken. Als pronkstuk geeft hij een figuur van een 11-hoek die hij verandert in een even grote driehoek.
Omdat ik zelf gegrepen was door de transformaties, besloot ik hier voor de leerlingen van de tweede klas lesmateriaal over te maken. Zo ontstond een serie opdrachten voor 2-havo/vwo, voor twee of drie lessen. Aan de orde komen naast de transformaties ook eenvoudig redeneren en bewijzen. Voor de leerlingen is dit moeilijk, maar het is een mooi moment om er al iets van te laten zien.

In de gang kwam een aantal jongens me achterna om hun oplossingen te laten controleren. Wat een voldoening als je van een 7-hoek een even grote 3-hoek weet te maken. Maar wel even zweten!

### Meester Ludolphs wortelrekenen (MdN)

**3-vwo en 4-vwo wiskunde B**

Dit jaar startte ik op een nieuwe school en kreeg onder andere een klas 2-vwo toegewezen. Het eerste dat op het menu stond waren wortels. Je maakt jezelf niet direct geliefd door als nieuwe docent met een dergelijk lastig onderwerp te starten. Ik realiseerde me weer wat voor impact deze wiskunde heeft op leerlingen. Tijd om eens te kijken wat Van Ceulen zegt over dit onderwerp. Gelukkig liet hij me niet in de steek.

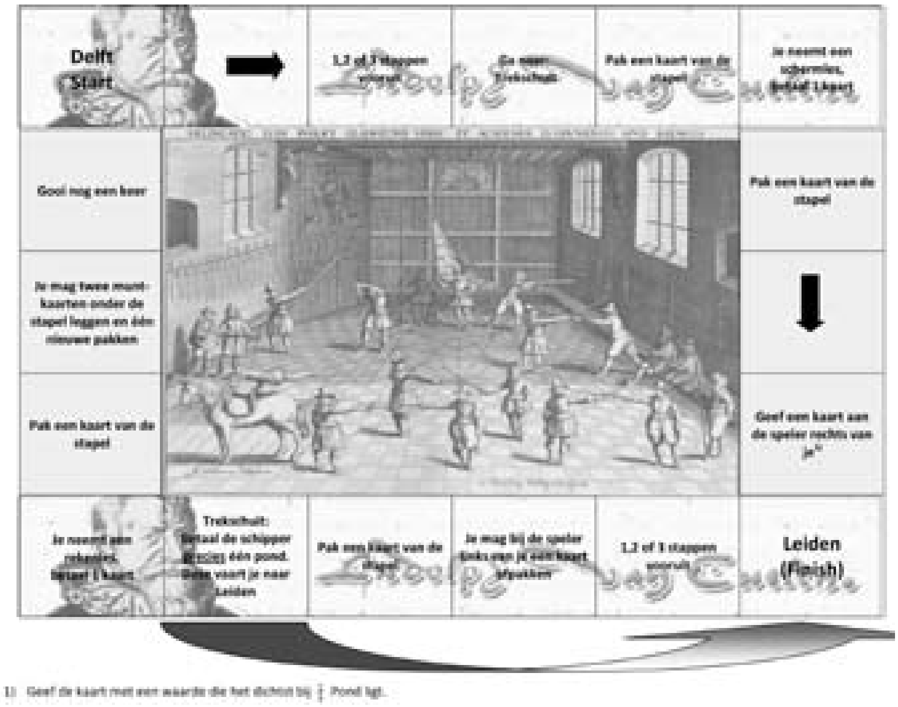
Vanwege 'gebrek aan rekenmachines' in die tijd laat hij in zijn *Fondamenten* de lezer allereerst zien hoe je van elk getal handmatige wortel kan berekenen. Een mooi algoritme dat ook interessant kan zijn om met leerlingen in de klas uit te voeren, echter, voor het materiaal dat ik op het oog had, minder geschikt. Ik wilde leerlingen praktisch aan de slag laten gaan met wortelrekenen op vwo-niveau.

Bijzonder van het materiaal van Ludolph is dat gelijksoortige en niet-gelijksoortige wortels mooie namen hebben (***zie figuur 3***). Gelijksoortige wortels noemt hij *communicanten*, een term die mijn leerlingen bijzonder interessant vinden. Een combinatie van twee niet-gelijksoortige wortels noemt hij een *binomisch* of *residuus* getal, respectievelijk de som of het verschil. Doordat leerlingen zich bewust worden van deze indeling krijgen ze een beter begrip van de mogelijkheden en onmogelijkheden bij het rekenen met wortels.

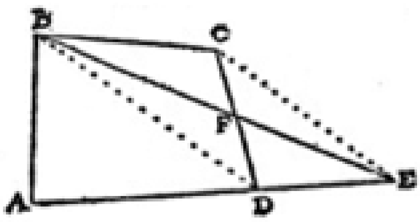
In het lesmateriaal staan de originele vraagstukken van Ludolph. Hij geeft de opgave en meteen ook het antwoord. Door bij elke opgave de wortels te herleiden en duidelijk de tussenstappen op te schrijven moet een leerling aantonen dat het antwoord van Ludolph correct is. Een fout in hun tussenstappen kunnen ze hierdoor direct herstellen. Uiteraard twijfelen leerlingen wel eens aan het antwoord van Ludolph. Het helpt om ze dan te herinneren aan het feit dat deze rekenmeester zonder enig rekentuig 35 correcte decimalen van pi kon berekenen. Overtuigd kijken ze dan toch kritisch naar hun eigen uitwerking.

Het materiaal is bedoeld voor het ophalen van de wortelvaardigheden uit klas 2. Dit kan voor 3-vwo leerlingen maar ook voor leerlingen in 4-vwo met wiskunde B. Er is op twee niveaus mee te werken. Ter uitdaging zijn er 'extra-vraagstukken' die een groter beroep doen op algebraïsche vaardigheden.

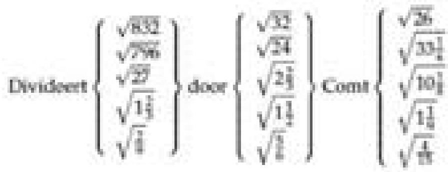
De relatie met de tweede klas is goed gekomen. Nu nog even afwachten of we dat ook kunnen zeggen van hun wortelvaardigheden.




figuur 1




figuur 2

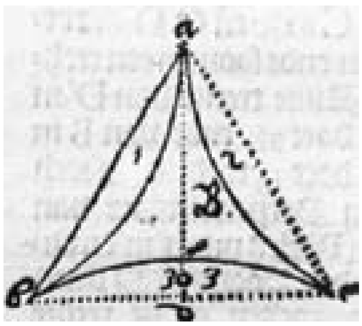



figuur 3

figuur 4

**Bewijzen onder leiding van Van Ceulen (MR)**
**4-vwo**
In de tijd dat ik de *Fondamenten* las, moest ik tijdelijk lesgeven in een bijgebouw. Het gebouw was gebruikt door een andere school en zou na ons verblijf tegen de vlakte gaan. De muren waren zachtgeel met overal witte plekken van dichtgesmeerde gaten. Van de onderdirecteur mocht ik het aankleden zoals ik wilde en ik besloot een aantal meetkundige proposities van Van Ceulen op de muur te zetten (***zie figuur 4*** op pag. 245). Tijdens de eerste lessen in het nieuwe gebouw wilde elke klas weten wat die muurschilderingen betekenden. Zo kwam ik op het idee om opdrachten te maken, waarmee de leerlingen zelf de betekenis van deze proposities kunnen vinden.
Het materiaal dat ik gemaakt heb, is bedoeld om leerlingen kennis te laten maken met redeneren en bewijzen. Op opdrachtbladen staan de stappen die gezet moeten worden om de proposities op de muur te bewijzen. De leerlingen worden uitgedaagd om de stappen met elkaar te verbinden en zo het bewijs af te maken. Ze lopen met de opdrachtbladen van muurtekening naar muurtekening om de bewijzen te doorgronden.
Ik weet uiteraard niet of u in de gelegenheid bent de figuren van Van Ceulen op de muur te schilderen. Mocht 'de baas' dit niet goed vinden, dan staan in het materiaal uiteraard de figuren, zodat u die in de klas kan ophangen of op tafels neer kan leggen. Het vergt wat organisatie, maar het is heel leuk om te zien hoe leerlingen elkaar uitleg geven bij die prachtige proposities.

**Landmeten onder leiding van Van Ceulen (MR)**
**4-havo, wiskunde B**
*Vanden Circkel*[4] is vooral bekend om de zoektocht van Van Ceulen naar de decimalen van het getal pi. Na de hoofdstukken over de cirkel staan een aantal hoofdstukken over landmeten (***zie figuur 5***). De landmeetproblemen waren leuk om te doorgronden, omdat bij veel opgaven de vergrotingsfactor een rol speelt. In lesboeken zijn sommen met de vergrotingsfactor vaak gekunsteld en hier speelde de vergrotingsfactor de hoofdrol in de oplossing.
Het doel van de opgaven van Van Ceulen was onder andere om te leren werken met goniometrische tabellen, die net even anders opgesteld zijn dan wij nu gewend zijn. In mijn onschuld probeerde ik de leerlingen ook deze tabellen te laten doorgronden. Hoewel de leerlingen aandoenlijk hun best deden om met deze 'Van Ceulen-getallen' te leren werken, zag ik dat ik mijn doel voorbij schoot. Bedankt H4B! Ik wilde *SosCasToa* herhalen omdat dat in de methode niet gebeurt, maar ik wilde de leerlingen niet in de war brengen. De 'Van Ceulen-getallen' heb ik geschrapt. Uit de landmeetproblemen heb ik acht verrassende, voor leerlingen geschikte opgaven gekozen. Deze opdrachten kunt u meegeven als po aan groepjes van twee of drie leerlingen. De leerlingen moeten uitzoeken hoe Van Ceulen de oplossing vond en hoe wij dat tegenwoordig zouden doen. Het is voor havo-B leerlingen een goede oefening in de vergrotingsfactor, *SosCasToa* en de stelling van Pythagoras. Ze moeten het hoofd koel houden in berekeningen met een behoorlijk aantal stappen, maar er staan genoeg aanwijzingen bij om ze vooruit te helpen!



figuur 5

figuur 5 is ABC de figuur die door drie naar binnen gebogen cirkelbogen begrensd wordt. Elke boog is ¼ van een cirkel. De driehoek die ABC omsluit is een gelijkzijdige driehoek met zijden van 360 roeden. Gevraagd: Hoe groot is de oppervlakte van de figuur ABC binnen de cirkelbogen?
Van Ceulen rekent met driehoekszijden van 1 roede, zodat het rekenwerk eenvoudig blijft. Vervolgens zet hij de vergrotingsfactor in om het gevraagde antwoord te vinden.

**Van Interest met Van Ceulen (MR)**
**5/6 vwo, wiskunde A**
En toen kwam *Van Interest*, ook een hoofdstuk uit *Vanden Circkel* (***zie figuur 6***). Dat moest iets kunnen opleveren voor wiskunde A. Ik begon met gevoelens van twijfel. Rente, wat was daar nou leuk aan? Toch zat ook in dit materiaal een grote verrassing. In het voorwoord van *Van Interest* geeft Van Ceulen aan dat hij de mensheid wil waarschuwen voor woekeraars en listige koopmannen. In veel opgaven laat hij handig rekenwerk zien, waardoor de opgaven ineens interessant worden om te bestuderen.
In de tijd van Van Ceulen werd nog veel gerekend met enkelvoudige rente. Op speelse wijze laat Van Ceulen A met B discussiëren en soms komt C (Van Ceulen?) met wijze raad. Wat te denken van A die 100 gulden leent van B tegen 10%, enkelvoudige rente. Na een jaar komt A terug bij B met de vraag of hij het geld nog drie jaar langer mag houden. B gaat hiermee akkoord. Drie jaar later ontstaat onenigheid over het terug te betalen bedrag. B gaat uit van 110 gulden (het bedrag dat hij na de oorspronkelijke afspraak teruggekregen zou hebben) plus drie jaar rente en wil 143 gulden zien. A gaat uit van de 100 gulden die hij 4 jaar geleend heeft plus vier jaar rente en komt met 140 gulden. B redeneert dan: 'Jij zegt dat die 110 gulden van 3 jaar geleden 4 jaar geleden 100 gulden waard waren. Dan kan ik ook zeggen dat die 110 gulden 12 jaar daarvoor 50 gulden waard waren en dat je dus nu maar $50 + 12 \times 5 + 3 \times 5 = 125$ gulden hoeft terug te betalen, '*…welcke rekeninghe my niet (noch niemant) behagen soude*.'

In het lesmateriaal over *Van Interest* staan de voorbeelden van de woekeraar en de listige koopman centraal, evenals de discussies tussen A en B over de te betalen rente.

**Koordenvierhoek (MdN)**
**5/6 vwo, wiskunde B**
Zodra ik me enigszins verdiept had in Ludolph van Ceulen, startte ik met het bestuderen van het 5e hoofdstuk uit de *Fondamenten*. Dit begint met een populair vraagstuk uit die tijd, de constructie van een koordenvierhoek op basis van vier gegeven lijnstukken (***zie figuur 7***). Van Ceulen gaat vervolgens op verschillende manieren deze gevraagde koordenvierhoek construeren. Voor mij betekende dit een interessante speurtocht naar zijn methoden en bijbehorende bewijzen.
In de 16e eeuw was er veel aandacht voor de klassieke Griekse meetkunde. De *Elementen van Euclides* waren deels in het Duits vertaald en dus toegankelijk voor Van Ceulen, die geen Grieks of Latijn beheerste. Daarnaast was in de middeleeuwen veel kennis ontstaan over het oplossen van praktische problemen met behulp van algebra. Vooral Islamitische wiskundigen hadden daar veel in betekend en ook hun teksten werden vanaf de 16e eeuw gepubliceerd. Ludolph als wiskundige

en ‘rekenmeester’ was een groot voorstander van het combineren van deze twee werelden: algebra als krachtig hulpmiddel om meetkundige problemen op te lossen. Om een algebraïsch verkregen oplossing terug te kunnen koppelen aan de meetkunde moest hij op basis van een getal de lengte van een lijnstuk construeren. De spelregels hiervoor waren nog niet bedacht dus dat deed Ludolph deels zelf.

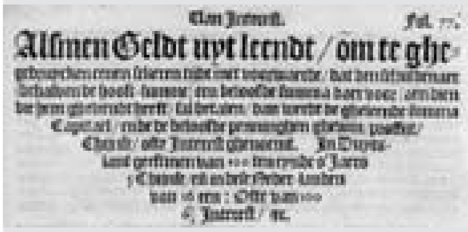
Leerlingen maken in dit materiaal eerst kennis met deze technieken van Ludolph: het koppelen van een getal aan een lijnstuk, het werken met een willekeurige eenheidsmaat en het zoeken van een onbekende eenheidsmaat bij een gegeven lijnstuk. Ook zien ze hoe Ludolph rekenkundige bewerkingen uitvoert met lijnstukken.
In het tweede hoofdstuk neem ik leerlingen mee op speurtocht naar de methoden van Ludolph om de koordenvierhoek te construeren op basis van vier gegeven zijden. Allereerst geeft hij een rekenkundige oplossing, via een algoritme voor het berekenen van de diagonaal van de koordenvierhoek. Wat hier achter zit, is dan nog onduidelijk, maar met de eerder geleerde technieken kunnen ze dan wel de koordenvierhoek construeren.
Daarna laat Van Ceulen een oplossing zien op basis van de klassieke Griekse meetkunde. Leerlingen ontdekken vervolgens dat de stelling van Ptolemaeus de brug is tussen de rekenkundige oplossing en de meetkundige constructie. Ze gebruiken hiervoor algebraïsche vaardigheden en ook de basiskennis van bewijzen en redeneren. Alle constructies worden uitgevoerd met behulp van passer en lat (liniaal zonder eenheidsaanduiding).
Ter afsluiting bevat het materiaal twee eindopdrachten met de originele tekst van Ludolph. Bij de eerste eindopdracht gaan leerlingen in de voetsporen van de rekenmeester zelf aan de slag met het exact berekenen van een aantal lijnstukken in de eerder geconstrueerde koordenvierhoek. De antwoorden staan al in de tekst en de leerling zal met een goede meetkundige onderbouwing en alle rekenkundige tussenstappen moeten laten zien of ze correct zijn. De tweede eindopdracht geeft een andere constructie van een koordenvierhoek met vier gegeven zijden. Door stap-voor-stap de tekst te doorlopen kan de leerling deze vierhoek zelf met passer en lat construeren.

*Het materiaal over de koordenvierhoek ligt bij de Zebra-redactie. Al het andere lesmateriaal inclusief docentenhandleiding is geplaatst op de website « www.ludolphvanceulen.nl ». We zouden graag zien dat u het gebruikt in de les. Mochten er vragen of opmerkingen zijn, laat het ons dan vooral weten.*

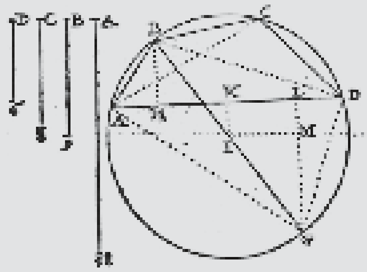
**De afgelopen jaren overziend...**
We vonden het bijzonder om aan de Universiteit Utrecht te studeren. Onze collegedag was het uitje van de week, hoe zwaar het soms ook was om werk en studie te combineren. We zullen het missen. Niet meer midden in de nacht uit bed springen omdat je een oplossing gevonden denkt te hebben. Niet meer in de tram met Van Ceulen op schoot.
We hebben meer geleerd dan verwacht. Het volgen van de vakken heeft onze eigen lessen verrijkt, zowel inhoudelijk als didactisch. Het acteren op wetenschappelijk niveau viel niet altijd mee: waarom toch altijd die bronvermeldingen als je gewoon lekker bezig bent. Maar het is onomkeerbaar, we stellen meer vragen en kijken kritischer naar de antwoorden. De contacten die we hebben opgedaan tijdens ons onderzoek zijn zeer waardevol. Van je zolderkamertje afkomen en aan een ander uitleggen wat je nu precies doet, levert meer inzichten dan gedacht. We waren blij met alle tips en steun.
En nu… Onze leerlingen kunnen weer de volle aandacht krijgen, dus jongens en meiden zet je schrap! Onze familie en vrienden mogen rekenen op een hernieuwde kennismaking.

**Dank**
Tot slot willen we Joke Daemen bedanken die het met ons wel wilde proberen en Steven Wepster die ons begeleidde, motiveerde, verbeterde, op het spoor zette, uitdaagde, nogmaals verbeterde en waardeerde om ons werk.

**Noten**
[1] Zie: *www.mastermath.nl*
[2] Zie voor meer informatie: *www.ludolphvanceulen.nl*
[3] L. van Ceulen (1615): *De Arithmetische en Geometrische Fondamenten.* Leiden: Joost van Colster en Jacob Marcus.
[4] L. van Ceulen (1596): *Vanden Circkel.* Delft: Jan Andriesz.


Van Intrest. Fol. 77.
Alsmen Geldt uyt leendt / om te ghe-

figuur 6



figuur 7

**Over de auteurs**
Marjanne de Nijs is wiskundedocent op het Cosmicus College in Rotterdam en redactielid van *Euclides*.
E-mailadres: *nijs0471@planet.nl*
Margot Rijnierse is wiskundedocent op De Populier in Den Haag.
E-mailadres: *mm.rijnierse@freeler.nl*