Duytsche Mathematicque

[Jantien Dopper]

In 2010 is het 400 jaar geleden dat Ludolph van Ceulen overleed. Om verschillende redenen is het mooi om daar aandacht aan te besteden. Van Ceulen was een verwoed rekenaar die steevast 'met lust ende arbeyt' verder rekende waar anderen stopten. Doordat hij niet academisch geschoold was, nam hij niet altijd de meest voor de hand liggende weg; wel bedreef hij wiskunde van internationaal niveau. Er zijn inderdaad verschillende redenen waarom we van mening zijn dat Van Ceulen en zijn werk de moeite waard zijn om een serie artikelen aan te wijden. Zijn werk ademt steeds een werklustige frisheid, zijn wiskunde is vaak mooi en boeiend, en dat maakt het tot heel interessant materiaal om met leerlingen aan te werken. Het kijken naar de problemen waarmee wiskundigen in zijn tijd worstelden, geeft een verdieping aan de schoolwiskunde van nu. Daar komt nog bij dat Van Ceulen interessante, soms zelfs spetterende, relaties met zijn omgeving had en daardoor leren we dan weer iets over de tijd waarin hij leefde. Al met al dus genoeg reden om u acht (nu nog vijf) nummers lang te trakteren op Van Ceulen-verhalen, geschreven door diverse specialisten.

Op 10 januari 1600 werd Ludolph van Ceulen op 59-jarige leeftijd aangesteld als een van de twee professoren aan de net opgerichte *Duytsche Mathematicque*, een ingenieursschool. Van Ceulen was zijn loopbaan begonnen als scherm- en rekenmeester en de functie als hoogleraar aan de ingenieursschool vormde de erkenning van zijn capaciteiten en kwaliteiten. Tot aan zijn dood op 31 december 1610 bleef Ludolph van Ceulen als hoogleraar aangesteld.
Na het overlijden van Van Ceulen kwam het hoogleraarschap van de Duytsche Mathematicque in handen van de familie Van Schooten. Achtereenvolgens werden Frans van Schooten senior, Frans van Schooten junior en Pieter van Schooten aangesteld als hoogleraar. In 1679 werd er na de dood van Pieter van Schooten geen opvolger benoemd en zo kwam er een einde aan bijna acht decennia Duytsche Mathematicque.

Met de oprichting van de Duytsche Mathematicque ontstond er in Holland een nieuwe instelling waarin praktisch onderwijs in de wiskunde centraal stond. Het bestaansrecht van de opleiding was sterk gerelateerd aan de politiek-militaire situatie in de Nederlanden. De jonge Republiek was in 1600 in een felle strijd verwikkeld met de voormalige landsheer Filips II van Spanje. Maurits, de zoon van Willem van Oranje, was vanaf 1585 tot zijn dood in 1625, kapitein-generaal van het leger en wilde het leger hervormen en moderniseren. Tevens had hij had een grote belangstelling voor de wetenschappen en wiskunde. Zijn belangrijkste gesprekspartner voor wiskundige onderwerpen was Simon Stevin, die vanaf 1593 ook actief was in het leger, alhoewel zijn positie pas in 1604 formeel werd vastgelegd. De lessen en gesprekken tussen Maurits en Stevin resulteerden in het werk *Wisconstige Ghedachtenissen*. De belangstelling van Maurits voor wiskunde was ingegeven door de opvatting dat het gebruik van wiskunde kon leiden tot een beter georganiseerd en vaardiger leger. Bovendien had hij behoefte aan praktisch geschoolde vaklieden die kennis hadden van landmeten en fortificatie om het land te kunnen dienen. En ook werden er in de maatschappij in toenemende mate hogere eisen gesteld aan ingenieurs en landmeters. Zo kregen landmeters naast het bepalen van oppervlakten van percelen steeds vaker de taak om kaarten te maken van de percelen die zij opmaten, en dat vereiste meer wiskundige kennis. Om de aankomend ingenieurs en landmeters van de noodzakelijke kennis te voorzien nam Maurits in 1600 het initiatief tot het oprichten van de Duytsche Mathematicque. Hij liet zijn vertrouweling Simon Stevin een opzet maken van het lesprogramma en daarnaast beval hij Ludolph van Ceulen en Simon van Merwen aan als docenten.[1] Van Merwen was landmeter en oud-burgemeester van de stad Leiden.
Simon Stevin en Ludolph van Ceulen waren voor elkaar geen onbekenden. Reeds in 1582 had Van Ceulen een oplossing gegeven voor een probleem dat hem door Simon Stevin was aangedragen. Het is dus goed mogelijk dat Stevin Van Ceulen heeft aangedragen als docent bij Maurits, alhoewel Van Ceulen zelf ook connecties met de Oranjes had. Voor zijn verhuizing naar Leiden in 1594 was Ludolph van Ceulen werkzaam als schermmeester in Delft en zijn schermschool was gevestigd in de kapel van het Sint Agathaklooster, waarvan ook een deel in gebruik was als hof van Willem van Oranje. Zijn meesterwerk, *Vanden Circkel* (1596), droeg Van Ceulen op aan Willem's zoon Maurits, de oprichter van de Duytsche Mathematicque.

Een buitenbeentje van de universiteit

De Duytsche Mathematicque was een vreemde eend in de bijt van de Leidse universiteit. Sinds de oprichting van de academie was deze sterk humanistisch van karakter geweest, waarbij bestudering van klassieke bronnen centraal stond. De meer praktische aanpak van de Duytsche Mathematicque lag niet in het verlengde van de humanistische stijl. Bovendien was de voertaal aan de Duytsche Mathematicque afwijkend van de voertaal aan de rest van de universiteit. Normaliter werden colleges in het Latijn gegeven, maar Maurits stond er op dat de lessen aan voor de toekomstig ingenieurs 'in goeder duytscer tale' werden gedoceerd. Dit besluit zal er mee te maken hebben gehad dat de

kennis van het Latijn van de beoogde doelgroep, de aankomend ingenieurs en landmeters, over het algemeen niet van voldoende niveau was om colleges in die taal te kunnen volgen. Daarnaast was Simon Stevin van mening dat de Nederlandse taal het meest geschikt was voor het uitwisselen van wetenschappelijke ideeën.
Rond dezelfde tijd gebeurde iets vergelijkbaars in Friesland. Daar had de in 1598 aan de universiteit van Franeker aangestelde wiskundige en vestingbouwer Adriaan Metius bedongen dat hij zijn lessen naar keuze in het Latijn of Nederlands mocht geven. Later werd het voorbeeld gevolgd in Amsterdam, waar vanaf 1653 aan het Athenaeum ook wiskundecolleges in het Nederlands werden verzorgd door De Bie. Hoewel het college van curatoren en burgemeesters Van Ceulen en Van Merwen benoemden, en Maurits wilde dat de opleiding deel van de universiteit uitmaakte, namen de hoogleraren van de Duytsche Mathematicque een aparte positie in. Zij maakten bijvoorbeeld geen deel uit van de Senaat, het college van professoren waarin zaken aangaande de universiteit werden besproken en de rectorsverkiezingen plaatsvonden.[2] Voor de studenten van de Duytsche Mathematicque gold ook dat hun positie afweek van die van de reguliere studenten aan de academie. Uit verzoekschriften van studenten, met als inzet vrijstelling van de bier- en wijnaccijns, blijkt dat zij niet dezelfde voorrechten genoten als de studenten ingeschreven aan andere faculteiten van de universiteit.[3]

Het lesprogramma volgens de opzet van Stevin

De opzet van Stevin geeft aan hoe er volgens hem invulling moest worden gegeven aan de lessen. Iedere les duurde een uur, waarvan het eerste half uur bestemd was voor een algemeen hoorcollege en er in het tweede half uur tijd was voor het oefenen met de leerstof en het beantwoorden van vragen van studenten. De studenten moesten dus niet enkel luisteren, maar zich ook de leerstof eigen maken. De theorielessen vonden plaats in de Faliebagijnkerk aan het Rapenburg, waar ook het anatomisch theater en de bibliotheek gevestigd waren, evenals Van Ceulen's schermschool. De instructie geeft ook een overzicht van het curriculum van de Duytsche Mathematicque. Stevin had een opbouw voor ogen in het lesprogramma. Het doel was de jongemannen kennis bij te brengen zodat zij 'het landt als ingenieurs (...) connen dienen'. Hiertoe werden delen van de arithmetica en het landmeten onderwezen,
maar enkel 'soo veel als tot het dadelijck gemeen ingenieurschap noodich is'. Welke onderdelen voor een ingenieur nodig waren, zette Stevin daarna uiteen. Grofweg zijn drie fasen te onderscheiden.
In de *eerste* fase van de opleiding moesten de aankomend ingenieurs de basisbewerkingen van het *rekenen* (optellen, aftrekken, vermenigvuldigen en delen) in gehele getallen, breuken en decimale breuken onder de knie krijgen. Deze decimale breuken waren door Stevin in 1585 gepropageerd in het werk *De Thiende* en nog een relatieve noviteit in de wiskunde. In de bijlage bij *De Thiende* had Stevin reeds uit de doeken gedaan hoe het werken met decimale breuken in de landmeetkunde het rekenwerk kon vereenvoudigen. Het opstellen van het lesprogramma bood Stevin de kans de verspreiding van decimale breuken verder te stimuleren. Verder moest de toekomstig ingenieur kunnen werken met de 'regel van drieën', dat wil zeggen, hij moest x kunnen bepalen uit $x : a = b : c$ waarbij a, b en c gegeven zijn. Deze rekenregel kwam in zowat alle rekenboekjes van de vroegmoderne tijd onder deze naam voor.

Zodra de student ervaren was in het rekenen, kon er een begin worden gemaakt met het *tweede* onderdeel van de opleiding: het *landmeten*. Deze fase bestond uit eerst een theoretisch deel, en wanneer de student daarin voldoende geoefend was, een praktisch deel. Het theoretische deel week sterk af van de klassieke meetkunde. In problemen uit de klassieke meetkunde werd een lijnstuk (of een punt of een verzameling punten) met een bepaalde eigenschap gezocht. Een probleem was opgelost wanneer er een constructie van het lijnstuk (of het punt of de verzameling punten) was gegeven. Verder kwamen er in de klassieke meetkunde geen getallen voor, hetgeen betekende dat een lijnstuk geen lengte had die in een getal was uitgedrukt. Nadrukkelijk stelt Stevin dat het in de te onderwijzen meetkunde aan de Duytsche Mathematicque niet de bedoeling is de klassieke lijn te volgen, maar dat men in de meetkunde moet werken met lijnstukken die juist wél een lengte hebben. Het doel van de meetkunde was het bepalen van oppervlakten van tweedimensionale figuren en de inhoud van driedimensionale objecten. Verder hoefde de ingenieur geen kennis te hebben van kegelsneden (ellipsen, parabolen en hyperbolen) aangezien hij deze krommen in de praktijk niet snel zou tegenkomen, en oppervlakten van kromlijnige figuren ook met driehoeken goed te benaderen zijn.
Wanneer de student bedreven was in de theorie van het landmeten was het tijd de geleerde kennis in de praktijk te brengen. In het veld leerde de student een op papier getekende figuur met bakens uit te zetten, en een kaart te maken van een in het veld uitgezette figuur. Daarnaast werd in de praktijklessen geoefend met instrumenten waarmee hoeken gemeten konden worden en andere instrumenten die de landmeter tot nut konden zijn.

Hierna volgde de *derde* en laatste fase van de opleiding: de *fortificatie*. Net als het landmeten viel dit onderdeel uiteen in een theoretisch en praktisch gedeelte in het veld. Tijdens de theorielessen leerde de student de terminologie van de vestingbouw en de beginselen van het fortificeren van steden. Wanneer dit onder de knie was, raadde Stevin de student aan 's zomers in het leger mee te lopen om zo de aanleg van versterkingswerken in de praktijk te kunnen aanschouwen. In de winter, zo besloot Stevin, mochten de ingenieurs altijd terug komen naar Leiden om zich daar nog meer te verdiepen in 'diepsinnigher stoffen' van het ingenieurschap.

Lespraktijk en studenten

Uit de opzet van het lesprogramma van Simon Stevin blijkt het ideaalbeeld waaraan de opleiding moest voldoen. Over de praktijk van de lessen uit de beginjaren zijn we echter veel minder goed geïnformeerd. Wel is bekend dat Ludolph van Ceulen vanwege zijn gevorderde leeftijd al snel een van zijn meest getalenteerde studenten aannam als assistent. Deze assistent was Frans van Schooten senior, de latere opvolger van Van Ceulen als hoogleraar.
Van Schooten begon als manusje van alles en was in het begin belast met hand- en spandiensten zoals het dragen van instrumenten en het uitzetten van de bakens tijdens de praktijklessen landmeten in het veld. Na enkele jaren van assistentschap nam Van Schooten steeds meer taken van Van Ceulen over omdat Van Ceulen 'een oudt man was' [4]. De praktijklessen in het veld kwamen nu volledig voor rekening van Van Schooten en daarnaast nam hij ook de schermlessen aan de schermschool voor zijn rekening. Na het overlijden van Simon van Merwen in het voorjaar van 1610 verdubbelde de werklast van Van Ceulen, waardoor hij nog meer taken overdroeg aan Van Schooten. Volgens zeggen van Van Schooten was Ludolph

van Ceulen zeer content met hem en had Van Ceulen graag dat Van Schooten hem zou opvolgen. Na de dood van Van Ceulen zou Van Schooten inderdaad de lessen aan de Duytsche Mathematicque voortzetten. Hij kreeg echter pas een vaste aanstelling als hoogleraar in 1615. Uit de opzet van het lesprogramma van Stevin blijkt dat de fortificatie een belangrijk onderdeel van de opleiding was. Van actieve bemoeienis door Ludolph van Ceulen of Simon van Merwen met vestingbouw is echter niets bekend. Hun opvolger Frans van Schooten sr. was in 1629 wel betrokken bij de versterkingen van de waterlinie tussen de Zuiderzee en de Lek. Aangezien een Spaanse inval vanaf de Veluwe dreigde, ontwierpen de Staten een plan voor een versterkte linie om de stad Utrecht en het gewest Holland te beschermen. Deze linie liep van Vreeswijk aan de Lek via de oostkant van Utrecht en dan langs de Vecht naar Muiden. De stad Utrecht huurde Van Schooten sr. samen met zijn zoon en twee andere ingenieurs in om de vestingwerken aan de oostkant van de stad te ontwerpen en uit te voeren.
Over de herkomst van de studenten is bijzonder weinig bekend, omdat de studenten niet werden genoteerd in het inschrijfregister van de universiteit. Uit overgeleverde verzoekschriften van de studenten uit de periode 1611-1615 blijkt dat het publiek onder meer bestond uit timmergezellen, landmeters, schoolmeesters en steenhouwers. Het is maar de vraag in hoeverre de opleiding inderdaad de ingenieurs heeft afgeleverd die Maurits voor ogen had. In het leger waren er in ieder geval slechts een beperkt aantal ingenieurs met een vaste aanstelling; het merendeel werd op projectbasis ingehuurd als er versterkingen gebouwd moesten worden. In 1646 schreef Van Schooten jr. aan Constantijn Huygens dat de Duytsche Mathematicque naast ingenieurs ook bedoeld was om schoolmeesters, landmeters en wijnroeiers op te leiden.[5] Deze verandering waarbij ook civiele beroepen uitdrukkelijk worden genoemd als doel van de opleiding, heeft te maken met de veranderende situatie in de Republiek. Met de Vrede van Münster in 1648 erkende Spanje de Republiek als soevereine staat en hiermee kwam er een einde aan de oorlogssituatie met Spanje. Direct werden de budgetten voor het leger gekort. De directe noodzaak tot het opleiden van ingenieurs en vestingbouwers voor het leger kwam hiermee weg te vallen.

Competentie

In het vorige nummer van *Euclides*[6] heeft Fokko Jan Dijksterhuis gewezen op het gebrek aan formele structuren om iemands wiskundige competentie te bepalen.
Gevolg hiervan was dat wiskundigen zelf de publiciteit zochten om zo hun kunde te verkondigen en andermans onkunde aan de kaak te stellen. Aan de Duytsche Mathematicque speelde ook de kwestie van de deskundigheid van de studenten. Reeds in augustus 1600 meldden zich de eerste toehoorders bij Ludolph van Ceulen omdat zij een getuigenis van hun bekwaamheid in het landmeten wilden. Hierop gaven de curatoren en burgemeesters de beide hoogleraren toestemming tot het examineren van de kandidaten. Geslaagden kregen dan een brief van bekwaamheid voorzien van het zegel van de universiteit. Blijkbaar was de kwestie hiermee nog niet voldoende opgelost, want in november 1602 werd er weer gedebatteerd in het college van curatoren en burgemeesters over het examen en de te behalen akte. Ditmaal werd besloten dat de studenten, ten einde een brief van bekwaamheid te krijgen, examen moesten afleggen in aanwezigheid van zowel de professoren van de Duytsche Mathematicque als de hoogleraar wiskunde van de universiteit, in dit geval Rudolph Snellius. Daarnaast probeerde de universiteit de Staten van Holland zover te krijgen dat aspirant-landmeters het toelatingsexamen tot landmeter voortaan in Leiden zouden afleggen en dat iedere landmeter in Holland verplicht de opleiding te Leiden zou moeten doorlopen.
Dit door Leiden gewenste monopolie op de landmetersopleiding heeft het echter niet gehaald en de bestaande structuur, met een examen in Den Haag, bleef in stand. Van de 187 landmeters die de Staten van Holland in de periode 1602-1641 admitteerden, noemden 69 de Duytsche Mathematicque als genoten opleiding. Verder traden de professoren van de Duytsche Mathematicque tot 1641 regelmatig op als examinatoren van de landmeters bij de Staten. Zo heeft Ludolph van Ceulen in de periode 1602-1608 regelmatig aspirant-landmeters aan een examen onderworpen.[7]
De oprichting van de Duytsche Mathematicque toont de belangstelling voor praktisch georiënteerde wiskunde aan het begin van de 17de eeuw. De actieve bemoeienis van Maurits bij de oprichting laat zien dat deze belangstelling zich ook tot hogere kringen uitstrekte. Na de oprichting was het aan Ludolph van Ceulen om samen met Simon van Merwen de eerste tien jaar vorm te geven aan de dagelijkse praktijk van de Duytsche Mathematicque in Leiden. Voor Van Ceulen moet de benoeming tot hoogleraar de kroon op zijn carrière zijn geweest.

Transformatie van figuren

Van *n*-hoek naar driehoek met dezelfde oppervlakte
In zijn werk *Vanden Circkel* (1596) wijdt Ludolph van Ceulen enkele van de honderd voorbeelden uit het 22e hoofdstuk aan een methode om een willekeurige n-hoek te transformeren in een driehoek met hetzelfde oppervlakte als de gegeven n-hoek. In het postuum verschenen *Arithmetische en Geometrische Fondamenten* (1615) handelt het begin van het derde deel over deze materie. In een handschrift van Frans van Schooten,[8] die na de dood van Van Ceulen diens lessen overnam aan de Duytsche Mathematicque, komt hetzelfde onderwerp ook aan de orde.
De methode om een n-hoek te transformeren tot een driehoek komt neer op herhaald toepassen van hetzelfde stappenplan. Een stap transformeert een n-hoek in een (n-1)-hoek met dezelfde oppervlakte. Aan de hand van het voorbeeld van een onregelmatige vierhoek illustreren we de werkwijze. Laat $ABCD$ een onregelmatige vierhoek zijn (***zie figuur 1***). We willen deze vierhoek transformeren tot een driehoek met gelijke oppervlakte. Trek de lijn AC en trek door het punt B de lijn l evenwijdig aan AC. Het snijpunt van de lijn l en DC verlengd is E. Nu is de oppervlakte van driehoek ADE gelijk aan de oppervlakte van de vierhoek $ABCD$. Dit zien we door te kijken naar de driehoeken. Eerst merken we op dat de oppervlakte van de driehoek ABC gelijk is aan de oppervlakte van de driehoek ACE aangezien ze dezelfde basis en hoogte hebben. Omdat de oorspronkelijke vierhoek $ABCD$ bestaat uit de driehoeken ACD en ABC en de geconstrueerde driehoek AED bestaat uit de driehoeken ADC en ACE, concluderen we dat de oppervlakten gelijk zijn. Tenslotte merken we op dat het punt E ook gedefinieerd kan worden als het snijpunt van de lijn l met het verlengde van AD. In dat geval is de gevraagde driehoek DCE een lange smalle driehoek.

In figuur 2 is een zeshoek *ABCDEF* gegeven. Herhaald toepassen van de methode levert via de vijfhoek *ABCGF* en de vierhoek *ABCH* uiteindelijk de driehoek *ICH*, die dezelfde oppervlakte heeft als de oorspronkelijke zeshoek.

Cirkelkwadratuur

Ludoph van Ceulen is met name bekend geworden door zijn berekeningen van (uiteindelijk) 35 decimalen van pi. Daarnaast heeft Van Ceulen in druk de cirkelkwadraturen van Simon van der Eycke en Scaliger bekritiseerd. In de *Arithmetische en Geometrische Fondamenten* vinden we op pagina 148 echter toch enkele manieren om bij een gegeven cirkel een vierkant te construeren met dezelfde oppervlakte als de cirkel. Van Ceulen vertelt de lezer er dan wel bij dat tot nu toe niemand het probleem 'volcomen' heeft kunnen oplossen, maar dat wel velen een methode hebben gevonden die een goede benadering geeft. De gevolgde methode staat zowel in de *Arithmetische en Geometrische Fondamenten* als in het hierboven vermelde handschrift van Frans van Schooten.

Gegeven is een cirkel met diameter AC en middelpunt O; ***zie figuur 3***. Verdeel AC in 14 gelijke stukken. Het punt D ligt op de diameter op $\frac{3}{14}$e deel van het eindpunt A. Trek vanuit D een loodlijn op de diameter; deze snijdt de cirkel in het punt B. Verbind B en C. Het lijnstuk BC is nu de zijde van het gezochte vierkant.

Uit deze constructie kunnen we de gebruikte benadering voor pi afleiden. Hiervoor stellen we dat de diameter van de cirkel 14 bedraagt. Omdat driehoek ADB gelijkvormig is met driehoek BDC, volgt: $AD : BD = BD : DC$, en dus:

$BD = \sqrt{AD \cdot DC} = \sqrt{33}$

In de cirkel is nu:

$BC = \sqrt{BD^2 - DC^2} = \sqrt{154}$

De oppervlakte van het vierkant op BC dus 154, en de oppervlakte van de cirkel is $\pi r^2 = 49\pi$. Aangezien de cirkel en het vierkant dezelfde oppervlakte hebben, blijkt dat de gebruikte benadering van pi het getal $\frac{154}{49} = \frac{22}{7}$ is.

Noten

[1] Simon Stevin: *Maniere en ordre* .... (Leiden, 1600); Amsterdam, Scheepvaartmuseum, signatuur B-I-0073 (II, 37). De opzet van het lesprogramma is ook afgedrukt in: P.C. Molhuysen: *Bronnen tot de geschiedenis der Leidsche Universiteit*. Den Haag, 1913; pp. 389-391 (RGP 20).

[2] 'Ende also vorders deselve professie bedient wort op een plaets buiten d'Academie, ende de professoren derselve in de Senatus Academicus niet en syn begreepen, nochte gemoeijt en werden, om over eenige questien ofte decisien te staen.' Frans van Schooten jr. aan Constantijn Huygens, 4 februari 1646. In: *Briefwisseling Constantijn Huygens, deel 4 (1644-1649)*; Den Haag: J.A. Worp ed., 1915; p. 278.

[3] Bron: Universiteitsbibliotheek Leiden, Archief Curatoren 1, inv. nr. 42/2.

[4] Frans van Schooten in een ongedateerde brief aan het college van curatoren en burgemeesters. Bron: Universiteitsbibliotheek Leiden, Archief Curatoren 1, inv. nr. 42/2.

[5] Frans van Schooten jr. aan Constantijn Huygens op 4 februari 1646. In: *Briefwisseling Constantijn Huygens, deel 4 (1644-1649)*; Den Haag: J.A. Worp ed., 1915; pp. 278-279.

[6] F.J. Dijksterhuis (2010): *Wiskunde op stand*. In: *Euclides* 85(5); pp. 186-188.

[7] E. Muller, K. Zandvliet (red.): *Admissies als landmeter in Nederland voor 1811*. Alphen aan den Rijn: Canaletto, 1987; p. 150, 154.

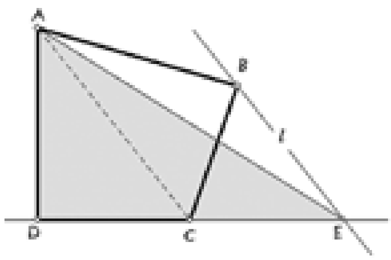
[8] Bron: Universiteitsbibliotheek Leiden, BPL 626.

Info

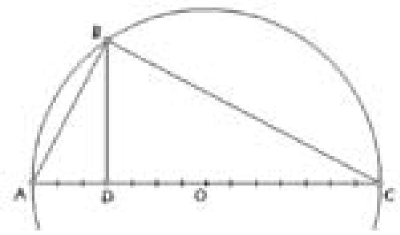
Zie verder ook: *www.ludolphvanceulen.nl*

Over de auteur

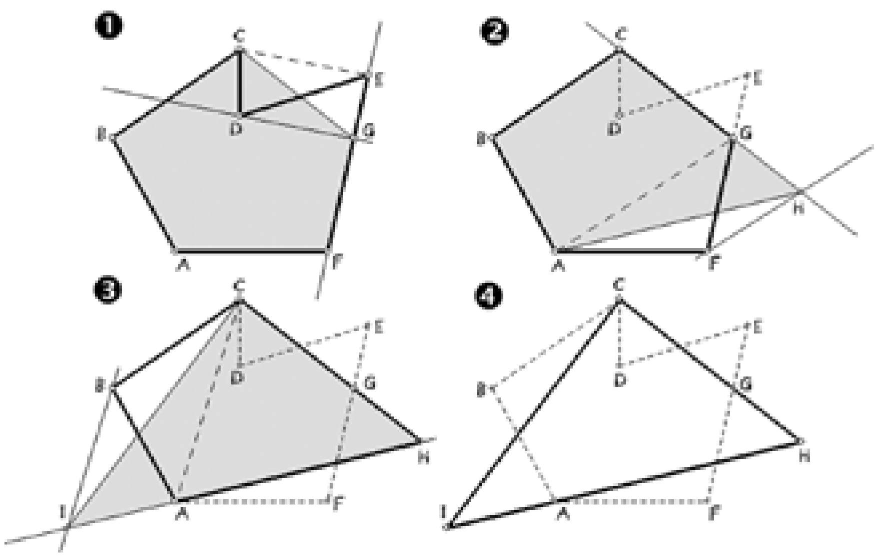
Jantien Dopper is als promovenda verbonden aan het Mathematisch Instituut van de Universiteit Utrecht. Zij werkt aan een proefschrift over de wiskundige Frans van Schooten (1615-1660).
E-mailadres: *j.g.dopper@uu.nl*



figuur 1



figuur 3


figuur 2