Enige opmerkingen bij Viètes responsum op Adriaan van Roomen

Roos Sorgdrager, Jan Beuving en Jesse Dorrestijn

10-05-06

1 Adriaan van Roomen

Adriaan van Roomen werd in 1561 geboren in Leuven maar studeerde wiskunde en filosofie in Keulen. Na zijn studie maakte hij enige omzwervingen (langs o.a. Rome) om vervolgens in Leuven van 1586 tot 1592 professor te zijn in wiskunde en medicijnen. Daarna verhuisde hij naar Würzburg, waar hij in dezelfde vakgebieden aan de universiteit werkzaam was. In 1601 ontmoette hij Viète in Frankrijk. Dat was na hun correspondentie over het beroemde probleem. Later in zijn leven verkaste Van Roomen naar Mainz, waar hij in 1615 overleed.

Een belangrijk deel van het werk van Van Roomen bestond uit het berekenen van zijden van n-hoeken in de cirkel. In zijn *Ideae Mathematicae Pars Prima*, dat, zoals de titel aangeeft, onderdeel van iets groters moest worden, stelde hij in de inleiding dat hij ernaar streefde om een formule te vinden waarmee hij de zijde van een n-hoek kon berekenen.
Hij zei dat hij drie methodes had gevonden, waarvan één algebraisch, waarmee hij die zijdes kon uitrekenen. Hij stelde de vergelijkingen op voor n tussen 2 en tachtig, en stuurde die vervolgens aan Van Ceulen, aan wie hij het uitrekenen overliet.

Het was ook in dat werk dat Van Roomen zijn beroemde 45^e graad vergelijking opgaf aan 'alle wiskundigen in de wereld'. Toen een Nederlandse hoogwaardigheidsbekleder tegen een Franse collega pochte dat er in Frankrijk niemand was die die vergelijking kon oplossen, stuurde de Fransman de opgave naar Viète die stante pede een oplossing gaf, en een dag later daar nog 22 oplossingen aan toevoegde.

Van Roomen berekende nog π in 16 decimalen, maar aangezien Van Ceulen dat wat preciezer deed, en in dezelfde tijdsperiode, wordt Van Roomen daar niet mee herinnerd. The Dictionary of Scientific Biography heeft het zonder vooraankondiging over 'his famous equation'; dat is vooral waarmee hij de boeken is ingegaan.

2 Het antwoord van Viète

De vergelijking van Van Roomen is als volgt:
$45x - 3795x^3 + 95634x^5 - 1138500x^7 + 7811375x^9 - 34512075x^{11} + 105306075x^{13} - 232676280x^{15} + 384942375x^{17} - 488494125x^{19} + 483841800x^{21} - 378658800x^{23} + 236030652x^{25} - 117679100x^{27} + 46955700x^{29} - 14945040x^{31} + 3764565x^{33} - 740259x^{35} + 111150x^{37} - 12300x^{39} + 945x^{41} - 45x^{43} + x^{45} = b$

waarin $b = \sqrt{\frac{7}{4} - \sqrt{\frac{5}{16}} - \sqrt{\frac{15}{8} - \sqrt{\frac{45}{64}}}}$. [1]

In het antwoord van Viète op deze beroemde vergelijking begint hij met te zeggen dat hij het probleem heeft opgelost, ondanks fouten van Van Roomen.

Hij begint met het integraal weergeven van de vraag van Van Roomen, en zegt dan dat deze vergelijking 'lachwekkend is, als hij niet wordt verbeterd'. Hij wijst eerst op een fout in de formulering van de hoofdvraag, en verlegt vervolgens zijn aandacht naar de fout die Van Roomen maakt in een van zijn voorbeelden. Viète verbetert die fout, zegt hij zelf, maar hij gaat zelf net zo hard de mist in.

Vervolgens komt hij toe aan het oplossen van het daadwerkelijke probleem. Hij begint met een paar vergelijkingen van derde en vijfde graad, en laat zien dat die twee respectievelijk drie oplossingen hebben. Hieruit leidt hij af dat een vergelijking van 45^e graad 23 oplossingen heeft. Deze wat inductieve redenering is het enige 'bewijs' dat Viète geeft voor het feit dat er 23 oplossingen zijn.

Daarna gaat Viète echt rekenen, en hij begint ermee de vergelijking gelijk te stellen aan $\sqrt{2}$. Van die vergelijking geeft hij zonder verdere constructie 23 oplossingen, het aantal oplossingen dat gezocht moest worden.

Een constructie geeft hij vervolgens wel voor het probleem. Hij deelt de zijde van de vijftienhoek, $\sqrt{\frac{7}{4} - \sqrt{\frac{5}{16}} - \sqrt{\frac{15}{8} - \sqrt{\frac{45}{64}}}}$, eerst in drieen, door hem gelijk te stellen aan de driedelingsvergelijking. Dan herhaalt hij deze stap, en tot slot stelt hij het verkregen resultaat gelijk aan de vijfdelingsvergelijking. Nu heeft hij 45 ontleed in 3.3.5, en zo vindt hij de eerste klassieke oplossing, namelijk de zijde van een 675 hoek.

[1] In het werk van Viète staat hier nog een tikfout; hij schrijft $740459x^{35}$.

Daarna legt hij uit hoe hij de andere 22 oplossingen in de cirkel construeert.

Caput II-VI: een indruk

Hier volgt een indruk van wat Vète schrijft. Het illustreert de manier waarop wij bezig zijn geweest met het Latijn van Viète; je een ongeluk vertalen en proberen te begrijpen wat er staat. Het laat ook wat gedetailleerder zien hoe Viète zijn redenering opbouwt om vervolgens met de constructie van de oplossing te komen. Ook komen de wat vileine opmerkingen aan Van Roomens adres wat beter door.

Caput II

> Zoals Romanus het probleem stelt: de voorste tot de laatste als...
> P_{45} [2] tot C... is het probleem onbepaald.
> *Lachwekkend* is het probleem van Adrianus echter, indien het niet verbeterd wordt, want welke term ik ook zal vertonen, zal ik niet (kunnen) zeggen, zonder te overdrijven, wat de eerste is, welke gezocht wordt.

(Vrije vertaling van Caput II, blz. 306, Ait Romanus...tot...opponere.)
Nu gaat hij ter vermaak enkele tegenvoorbeelden geven. Dit doet hij eerst met P_3 en daarna met P_5. In zijn eerste 'ter vermaak' stelt geeft hij de volgende stelling:

> Gesteld twee groottes, waarvan de eerste zich tot de tweede houdt als x tot $3x - x^3$, gesteld dat uit de tweede gegeven de eerste volgt.

(Vertaling van Ludicrum I, blz. 306, Propositis duabus...tot...invenire primam. Nu geeft Viète een tegenvoorbeeld van deze stelling, waaruit blijkt dat de stelling niet juist geformuleerd is:

Zij de tweede gegeven is 1.

- Ik zeg dat de eerste $\frac{1}{2}$ is, dan $\frac{1}{2}$ staat tot 1 als x tot $3x - x^3$. Hieruit volgt dat $x = 1$.
- Ik zeg dat de eerste $\frac{4}{11}$ is, dan $\frac{4}{11}$ staat tot 1 als x tot $3x - x^3$. Hieruit volgt dat $x = \frac{1}{2}$.

[2] P_n is de n^{de}-graad polynoom zoals in het probleem gesteld is.

- etc. ook met P_5.

De stelling hield dus in, in moderne notatie: Zij $a{:}b = x{:}3x - x^3$, dan volgt unieke a uit een willekeurige b. Met zijn tegenvoorbeelden, waarin hij b=1 kiest en vervolgens laat zien dat er meerdere a's zijn waarvoor deze verhouding geldt. Laat hij zien dat a niet uniek is. Daarom stelt hij een andere probleemstelling voor, een herformulering waardoor wel een uniek antwoord volgt.

Vi'ete schreeuwt naar mijn mening wel heel hard van de toren door de vraagstelling van Van Roomen zo in de grond te boren en zelfs *lachwekkend* te noemen. Aan de andere kant zou het kunnen dat de manier van de vraagstelling veel zegt over de interpretatie van het probleem. Hier hebben we ons echter niet verder in verdiept.

In caput 3 en 4 herschrijft Van Roomen het probleem, wij gaan niet verder in op de vraag hoe en waarom hij dit zo doet.

Caput III

In hoofdstuk III herschrijft Viète het probleem als volgt.

$$3x - x^3 = D$$

En het tweede probleem is te schrijven als:

$$5x - 5x^3 + x^5 = G$$

Caput IV: verbetering van het probleem van Adrianus

In dit hoofdstuk verbetert Viète het probleem en zegt dus dat het een vergelijking moet zijn en geen verhouding.

Caput V: het voorbeeld van Adrianus bij het probleem dat niet overeenkomt met zijn oplossing

> Waarin Adrianus vermeldt bij welke het probleem betrekking heeft, is de fout in de laatste term binnengeslopen. Dus zo herstel ik de plaats: Zij de laatste term:
>
> $$\sqrt{2-\sqrt{2-\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2}}}}}}.^{3}$$

[3] Leuk gezien van Viète natuurlijk, maar deze wortel die hij geeft klopt ook niet, er staat een $\sqrt{2}$ te veel in.

Ik bevestig dat de overige noch de tweede noch de eerste of de derde bij het probleem nog maar iets overeenkomt. Blijkbaar wordt de term, die zoals ik heb hem gezocht, ergens anders vertoond,... (haberi quam vi Problematis). Want en niet daarom stel ik het werk geometrisch en los ik het probleem geometrisch op. Ik construeer met de eerste en de tweede gegeven een serie continue verhoudingen *in onervarenheid*. Maar ik vertoon daarmee niet uit de gegevens van de eerste, de vierde of de zesde de tweede geometrisch. Noch veranderen de herhaalde (symbola) machten in grootte door (asymetrische nummers) oneven getallen met de gegevens of met de gezochte door een 'strikvraag' en van buiten oneven. Het is door onduidelijke 'Mataeotechnia' onduidelijk uit te leggen, terwijl (van te voren?) samen met de mogelijkheid (adfectas) welke dan ook oplossend niet minder vruchtbaar dan de nieuwe methode, de pure analytische, die is ingevoerd in scholen. Maar sta mij toe de valse schijn op te houden. Waarom zal ik niet mijn tweede probleem van het probleem van Adrianus, dat ik zo kort op orde bracht, zo overeenkomend op te lossen? Integendeel want zal ik het toewijzen aan twijfelachtigheid (waarom Adrianus niet beter is in de zijne)?

Dus het vraagstuk is:

Vertaling van Caput V, blz.309, Exempla Adriani...tot...igitur esto.

Probleem I

Gegeven de grootte die gelijk is aan $3x - x^3$ en vind x.

Probleem II

Gegeven de grootte die gelijk is aan $5x - 5x^3 + x^5$ en vind x.

Deze problemen heeft hij dus analytisch opgelost en hij krijgt voor het eerste probleem steeds twee antwoorden en voor het tweede probleem 3 antwoorden.

Caput VI

In gezonde problemen, die twijfelachtig zijn,... heb je net zo veel oplossingen als machten.

...

Vrije vertaling van Caput VI, blz. 310, Sane problemata...tot...exposcam

> Maar zoals mijn twee problemen van het probleem van Van Roomen, zijn beide, waarvan het kan dat van de eerste twee verklaard worden, van de tweede drie, en zo bevestig ik dat het probleem van Van Roomen 23 verklaard zijn.

Vrije vertaling van Caput VI, blz. 310, Ut autem...tot...esse explicable Viète merkt hier dus op dat het aantal oplossing van $P_n = a$ gelijk is aan $\frac{1}{2}(n+1)$. Hij vertelt niet waarom dit zo is, maar redeneert op een soort van inductieve manier door. Dankzij deze redenering weet Viète dat hij 23 oplossingen voor het probleem van Van Roomen moet vinden.

De tabel

Hieronder geven we de tabel met daarin Viètes 23 oplossingen van de cirkeldelingsvergelijking van graad 45, waarbij het rechterlid van de vergelijking gelijk is aan de zijde van de vijftienhoek. Deze is in Viètes werk te vinden op bladzijde 314. Met Mathematica hebben we de waarden gecontroleerd en we hebben steeds naar beneden afgerond, dit omdat we aannemen dat Viète dit ook deed. Een reden om aan te nemen dat Viète naar beneden afrondde, is dat zijn waarde voor de sinus van 1 graad anders verkeerd zou zijn en deze leek ons bij hem goed bekend. Bij normale afronding zit er trouwens ongeveer dezelfde hoeveelheid fouten in de tabellen.

hoek (graden)	ondertogen	Viète	Mathematica	juist
$\frac{32}{60}$	$2 \cdot \sin(\frac{16}{60})$	0.0093083**9**	0.00930838	$\times$
$7\frac{28}{60}$	$2 \cdot \sin(3\frac{44}{60})$	0.13022572	0.13022572	$\checkmark$
$23\frac{28}{60}$	$2 \cdot \sin(11\frac{44}{60})$	0.40671389	0.40671389	$\checkmark$
$39\frac{28}{60}$	$2 \cdot \sin(19\frac{44}{60})$	0.67528585	0.67528585	$\checkmark$
$55\frac{28}{60}$	$2 \cdot \sin(27\frac{44}{60})$	0.**6**307141**4**	0.93071413	$\times$
$71\frac{28}{60}$	$2 \cdot \sin(35\frac{44}{60})$	1.168027**31**	1.16802712	$\times$
$87\frac{28}{60}$	$2 \cdot \sin(43\frac{44}{60})$	1.3**6**260**4**79	1.38260579	$\times$
$103\frac{28}{60}$	$2 \cdot \sin(51\frac{44}{60})$	1.570273**54**	1.57027362	$\times$
$119\frac{28}{60}$	$2 \cdot \sin(59\frac{44}{60})$	1.7273778**3**	1.72737785	$\times$
$135\frac{28}{60}$	$2 \cdot \sin(67\frac{44}{60})$	1.8508606**1**	1.85086064	$\times$
$151\frac{28}{60}$	$2 \cdot \sin(75\frac{44}{60})$	1.9383185**2**	1.93831853	$\times$
$167\frac{28}{60}$	$2 \cdot \sin(83\frac{44}{60})$	1.988492**38**	1.988**0**49256	$\times$
$16\frac{32}{60}$	$2 \cdot \sin(8\frac{16}{60})$	0.28756098	0.28756098	$\checkmark$
$32\frac{32}{60}$	$2 \cdot \sin(16\frac{16}{60})$	0.5602165**4**	0.56021653	$\times$
$48\frac{32}{60}$	$2 \cdot \sin(24\frac{16}{60})$	0.82196811	0.82196811	$\checkmark$
$64\frac{32}{60}$	$2 \cdot \sin(32\frac{16}{60})$	1.0677210**0**	1.06772101	$\times$
$80\frac{32}{60}$	$2 \cdot \sin(40\frac{16}{60})$	1.2926919**9**	1.29269193	$\times$
$96\frac{32}{60}$	$2 \cdot \sin(48\frac{16}{60})$	1.4925020**7**	1.49250208	$\times$
$112\frac{32}{60}$	$2 \cdot \sin(56\frac{16}{60})$	1.6632623**5**	1.66326237	$\times$
$128\frac{32}{60}$	$2 \cdot \sin(64\frac{16}{60})$	1.8016491**4**	1.80164915	$\times$
$144\frac{32}{60}$	$2 \cdot \sin(72\frac{16}{60})$	1.90496888	1.90496888	$\checkmark$
$160\frac{32}{60}$	$2 \cdot \sin(80\frac{16}{60})$	1.97121055	1.97121055	$\checkmark$
$176\frac{32}{60}$	$2 \cdot \sin(88\frac{16}{60})$	1.9990848**5**	1.99908486	$\times$

Foutenverklaring in de tabel en mogelijke methode van Viète

Wat meteen opvalt in de tabel is dat de laatste cijfers vaak niet kloppen. We zouden graag willen weten welke methode Viète precies gebruikt heeft om uit de eerste oplossing de andere te verkrijgen. We zijn op zoek naar een methode die ook de fouten in de tabel voortbrengt.

De eerste oplossing, tweemaal de sinus van 16 minuten, heeft Viète berekend. We zien dat hij dit niet helemaal correct gedaan heeft, maar uit narekening met Mathematica blijkt dat ook met deze foutieve waarde de overige oplossingen nauwkeurig genoeg berekend kunnen worden. Laten we kijken hoe Viète de overige waarden uit de sinus van 16 minuten bepaald zou kunnen hebben.

Viète schreef zelf al dat alle oplossingen twee vijfenveertigste deel van de cirkel oftewel 16 graden van elkaar afliggen. De 23 oplossingen kan je daarom schrijven als $2\sin(\frac{16}{60} + 8 \cdot k)$, waarbij $0 \leq k \leq 22$. Aangezien Viète in theorema II op bladzijde 15 de somregel van de sinus afleidt, is het aannemelijk dat hij deze toepast. Schrijf zodoende

$$\sin(\frac{16}{60} + 8 \cdot k) = \sin(\frac{16}{60}) \cdot \cos(8 \cdot k) + \cos(\frac{16}{60}) \cdot \sin(8 \cdot k) \qquad 1 \leq k \leq 22.$$

Nemen we aan dat Viète voor elke $1 \leq k \leq 22$ de sinus en de cosinus heel nauwkeurig kende, dat hij de cosinus van 16 minuten goed kon berekenen met behulp van de sinus van 16 minuten en dat hij bovendien foutloos kon rekenen, dan zouden alle waarden in de tabel goed zijn geweest. Een van de drie aannames klopt dus niet.

Laten we de eerste aanname beter bekijken. In de tabel op de volgende bladzijde, die de volgorde van bovenstaande tabel aanhoudt, staat voor elke k de bijbehorende sinus.

k	$\sin(180 - 8 \cdot k)$
22	$\sin(4) = \sin(1/45 \cdot \pi)$
21	$\sin(12) = \sin(1/15 \cdot \pi)$
20	$\sin(20) = \sin(1/9 \cdot \pi)$
19	$\sin(28) = \sin(7/45 \cdot \pi)$
18	$\sin(36) = \sin(1/5 \cdot \pi)$
17	$\sin(44) = \sin(11/45 \cdot \pi)$
16	$\sin(52) = \sin(13/45 \cdot \pi)$
15	$\sin(60) = \sin(1/3 \cdot \pi)$
14	$\sin(68) = \sin(17/45 \cdot \pi)$
13	$\sin(76) = \sin(19/45 \cdot \pi)$
12	$\sin(84) = \sin(7/15 \cdot \pi)$

k	$\sin(8 \cdot k)$
11	$\sin(88) = \sin(22/45 \cdot \pi)$
10	$\sin(80) = \sin(4/9 \cdot \pi)$
9	$\sin(72) = \sin(2/5 \cdot \pi)$
8	$\sin(64) = \sin(16/45 \cdot \pi)$
7	$\sin(56) = \sin(14/45 \cdot \pi)$
6	$\sin(48) = \sin(4/15 \cdot \pi)$
5	$\sin(40) = \sin(2/9 \cdot \pi)$
4	$\sin(32) = \sin(8/45 \cdot \pi)$
3	$\sin(24) = \sin(2/15 \cdot \pi)$
2	$\sin(16) = \sin(4/45 \cdot \pi)$
1	$\sin(8) = \sin(2/45 \cdot \pi)$

We zien dat deze sinussen voor een rekenwonder als Viète niet erg moeilijk te berekenen zijn. Voor sommige k is de sinus zelfs erg makkelijk te berekenen of zelfs al bekend bij Viète. Bij $k = 15$ is de sinus van 120 graden gevraagd, oftewel de sinus van 60 graden, die gelijk is aan de halve zijde van de driehoek.

Een goede aanwijzing dat Viète al deze sinussen erg goed kon berekenen is de tabel op bladzijde 311 die we hieronder weergeven.

hoek (graden)	ondertogen	Viète	Mathematica	juist
2	$2 \cdot \sin(1)$	0.03490**6**81287456	0.03490481287456	✓
18	$2 \cdot \sin(9)$	0.31286893008046	0.31286893008046	✓
34	$2 \cdot \sin(17)$	0.58474340944547	0.58474340944547	✓
50	$2 \cdot \sin(25)$	0.84523652348139	0.84523652348139	✓
66	$2 \cdot \sin(33)$	1.08927807003005	1.08927807003005	✓
82	$2 \cdot \sin(41)$	1.31211805798101	1.31211805798101	✓
98	$2 \cdot \sin(49)$	1.50941916044554	1.50941916044554	✓
114	$2 \cdot \sin(57)$	1.6773411358908**5**	1.67734113589084	×
130	$2 \cdot \sin(65)$	1.81261557407329	1.81261557407329	✓
146	$2 \cdot \sin(73)$	1.91260951192607	1.91260951192607	✓
162	$2 \cdot \sin(81)$	1.97537668119027	1.97537668119027	✓
188	$2 \cdot \sin(89)$	1.9996953903127**0**	1.99969539031278	×
6	$2 \cdot \sin(3)$	0.104671912485**99**	0.10467191248588	×
22	$2 \cdot \sin(11)$	0.3816179907530**9**	0.38161799075308	×
38	$2 \cdot \sin(19)$	0.65113630891431	0.65113630891431	✓
54	$2 \cdot \sin(27)$	0.90798099947909	0.90798099947909	✓
70	$2 \cdot \sin(35)$	1.14715287270209	1.14715287270209	✓
86	$2 \cdot \sin(43)$	1.36399672012499	1.36399672012499	✓
102	$2 \cdot \sin(51)$	1.55429192291394	1.55429192291394	✓
118	$2 \cdot \sin(59)$	1.71433460140422	1.71433460140422	✓
134	$2 \cdot \sin(67)$	1.**48**100970690488	1.84100970690488	×
150	$2 \cdot \sin(75)$	1.93185165257813	1.93185165257813	✓
166	$2 \cdot \sin(83)$	1.98509230328264	1.98509230328264	✓

In deze tabel staan de oplossingen van de vergelijking die je krijgt door het 45e-graadspolynoom gelijk te stellen aan de zijde van de vierhoek, $\sqrt{2}$. Op wat marginale fouten, vermoedelijk schrijf- of drukfouten, na zijn alle waarden uitstekend uitgerekend en in 14 decimalen nauwkeurig. Deze sinussen zijn als volgt te schrijven:

$$\sin(1 + 8 \cdot k) = \sin(1) \cdot \cos(8 \cdot k) + \cos(1) \cdot \sin(8 \cdot k) \qquad 1 \leq k \leq 22.$$

We zien dat om tot een goed antwoord te komen $\sin(8 \cdot k)$ voor elke k goed berekend moet zijn. Viète kende deze waarden dus goed en daarmee is aangetoond dat aanname 1 bijzonder aannemelijk is.

In deze tabel construeer je de oplossingen met behulp van de sinus van 1 graad, die Viète blijkbaar goed kende. In de tabel van bladzijde 314 construeer je de oplossingen met behulp van de sinus van 16 minuten. Dat de waarden in deze tabel in minder decimalen genoteerd zijn, komt doordat

Viète de sinus van 16 minuten minder nauwkeurig kende dan de sinus van 1 graad. Toch is Viètes waarde van de sinus van 16 minuten voldoende voor het juist berekenen van de oplossingen.

Dat Viète de cosinus van 16 minuten niet nauwkeurig kon bepalen uit de de sinus van 16 minuten lijkt ons onaannemelijk en we gaan ervan uit dat hij goed kon rekenen. Een mogelijkheid die nog overblijft is dat hij $\sin(8 \cdot k)$ voor elke k wel goed kende, maar een te klein aantal decimalen gebruikt heeft.

Laten we even kijken naar de sinus van 59 graden en 44 minuten. Deze kan als volgt berekend worden:

$$\sin(59\tfrac{44}{60}) = \sin(180-59\tfrac{44}{60}) = \sin(\tfrac{16}{60}+8\cdot 15) = \sin(\tfrac{16}{60})\cdot\cos(120)+\cos(\tfrac{16}{60})\cdot\sin(120) =$$

$$\sin(\tfrac{16}{60}) \cdot (-\tfrac{1}{2}) + \cos(\tfrac{16}{60}) \cdot \tfrac{1}{2}\sqrt{3} = \tfrac{1}{2} \cdot (\sqrt{3} \cdot \cos(\tfrac{16}{60}) - \sin(\tfrac{16}{60}))$$

Het antwoord dat Viète geeft is onjuist, hij heeft dus of voor $\sqrt{3}$ of voor de cosinus van 16 minuten te weinig decimalen genomen.

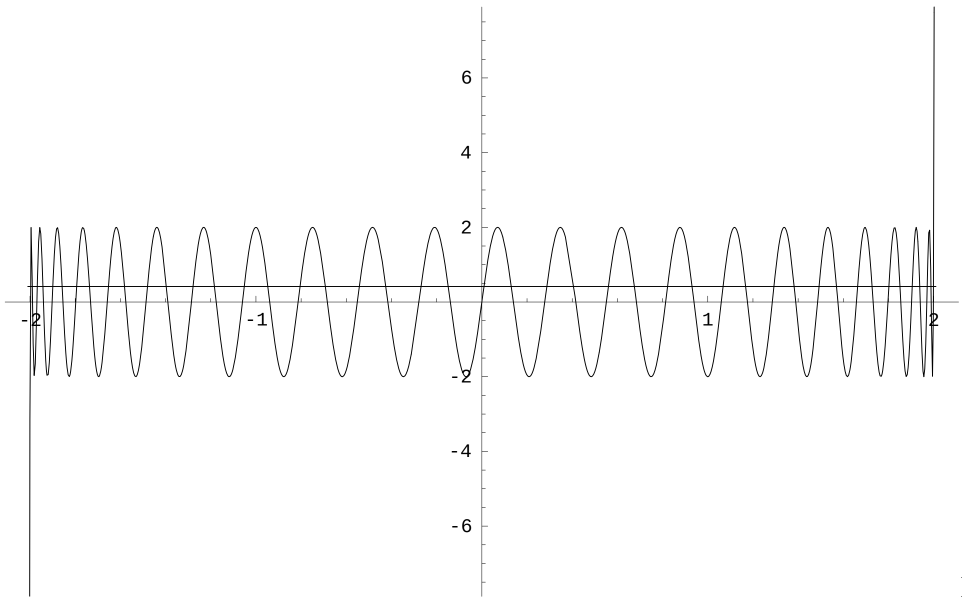
Dit zou een mooie verklaring zijn, daarom hebben we in Mathematica gekeken wat de invloed is van een te kleine nauwkeurigheid in de getallen die je gebruikt. Door bijvoorbeeld in het bovenstaande geval het aantal decimalen in $\sqrt{3}$, de cosinus van 16 minuten of de sinus van 16 minuten te variëren hoopten we op de verkeerde waarden van Viète uit te komen. Dit is op geen enkele manier gelukt. We kunnen dus de fouten niet goed verklaren.

Moderne oplossing

De vraag die Adriaan van Roomen stelde aan alle wiskundigen is in moderne notatie erg makkelijk te formuleren. Het 45e-graadspolynoom van Van Roomen kan je voor $-2 \leq x \leq 2$ eenvoudig opschrijven, namelijk $\sin(45 \cdot \arcsin(\frac{x}{2}))$. Dit geldt ook voor de zijde van een vijftienhoek, $2 \cdot \sin(\frac{1}{15} \cdot \pi)$. Van Roomens vraag luidt nu als volgt: geef een $-2 \leq x \leq 2$ zodat

$$2 \cdot \sin(45 \cdot \arcsin(\frac{x}{2})) = 2 \cdot \sin(\frac{1}{15} \cdot \pi).$$

Hier volgt een grafiek van Van Roomens 45e-graadspolynoom. De snijpunten met de horizontale lijn $y = \sqrt{\frac{7}{4} - \sqrt{\frac{5}{16}} - \sqrt{\frac{15}{8} - \sqrt{\frac{45}{64}}}}$ geven de oplossingen weer.



Een oplossing is $\sin(\frac{\pi}{45 \cdot 15})$ en voor de algemene oplossing kunnen we schrijvensin$(\frac{\pi}{45 \cdot 15} + \frac{2k\pi}{45})$.

Van Roomen zou dit antwoord niet voldoende vinden. Wellicht zou hij het waarderen dat wij het polynoom als het cirkeldelingspolynoom van de vijfenveertigste graad hebben herkend. Maar hij zou een numerieke waarde verlangen voor de zijde van de 675-hoek.

Tegenwoordig vinden we $\sin(\frac{\pi}{45 \cdot 15})$ een bevredigend antwoord. De reden daarvoor is dat we vertrouwd zijn met de sinus en zijn inverse. Dat hebben we te danken aan rekenmeesters als van Roomen, van Ceulen en Viète.

3 Bibliografie

[1] Francois Viète, *Opera Mathematica*, 1646, Frans van Schooten, Leiden. Facsimile 1970, George Olms Verlag, Hildesheim, New York. (pagina 305-322)

[2] C.G. Gillispie, *Dictionary of Scientific Biography, Volume XI*, 1975, Charles Scribner's Sons, New York.

[3] P.P. Bockstaele, *Een Leuvens mathematisch pamflet uit 1638*, jaartal onbekend, Departement Wiskunde K.U. Leuven.