Onderzoek naar de konstige vergelijkingen van Van Ceulen.

Sophie Verberne en Sonja Scheer

14 juni 2006

1 Inleiding

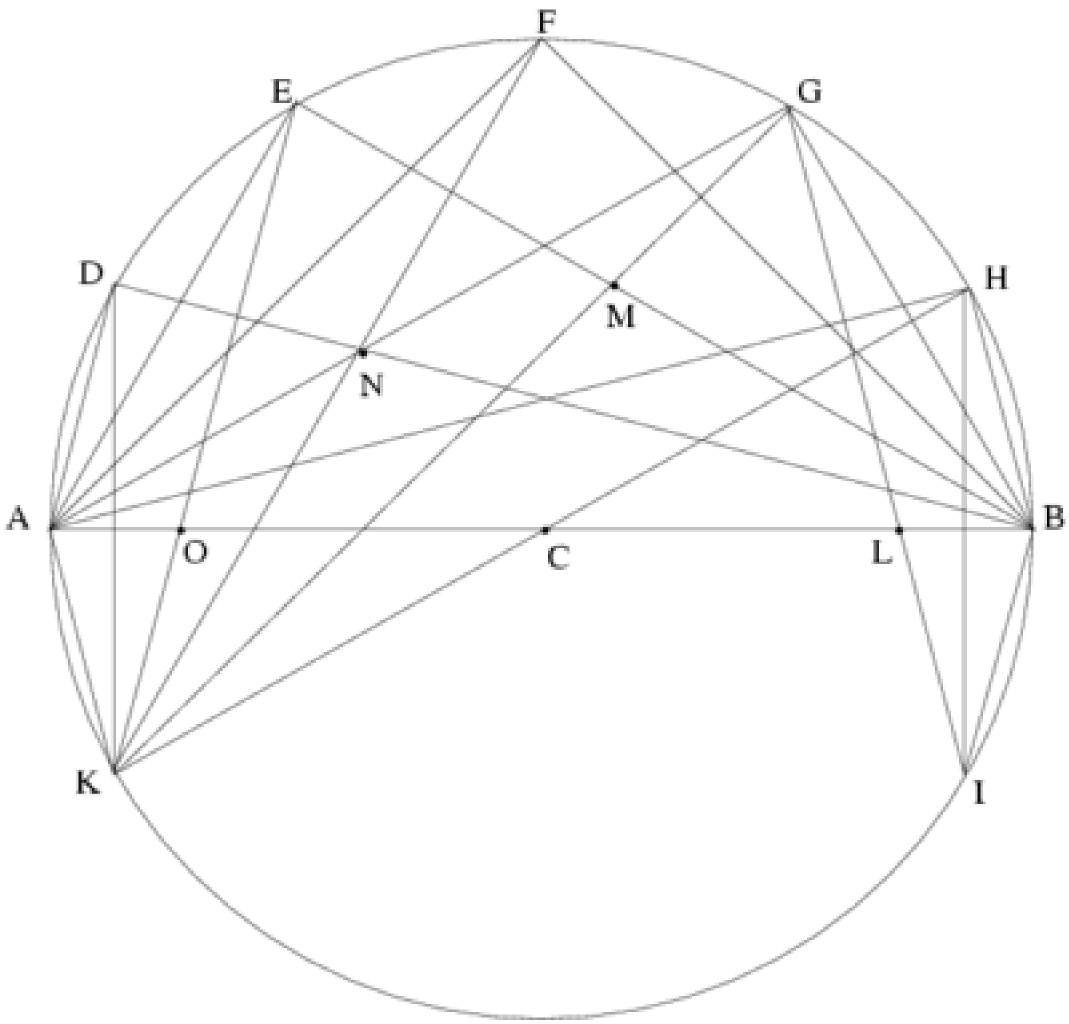
Wij hebben ons bezig gehouden met de *konstige vergelijkingen* welke Van Ceulen gebruikt in Vanden Circkel, waarbij hij in ons bestudeerde stuk niet uitlegt hoe hij er aan komt. Een aantal voorbeelden van deze vergelijkingen zijn: $3x - x^3$ en $5x - 5x^3 + x^5$ en Van Ceulen gebruikt ze in het XIIII. Capittel en verder. Hij gebruikt deze vergelijkingen om de lengte van bijvoorbeeld de zijde van een regelmatige achttienhoek te berekenen door middel van een derde graads vergelijking gelijk te stellen aan de zijde van een zeshoek. François Viète heeft laten zien hoe hij aan deze vergelijkingen komt in het hoofdstuk 'Universal Theorems on the Analysis of Angular Sections' van het boek 'The Analytic Art'[1]. Wij hebben van dit boek een Engelse vertaling van T. Richard Witmer bestudeerd. In dit verslagje vind je een samenvatting van wat er in dat hoofdstuk staat.

2 Constructie

De constructie is weergegeven in Figuur 1.

- Begin met een lijnstuk AB met C het midden van AB en teken nu een cirkel met straal AC en middelpunt C.
- Verdeel de omtrek van de cirkel in gelijke delen, hier nemen we 12 stukken, Dit geeft de punten D, E, F, G, H, K en I. Dat onze cirkel verdeeld is in 12 stukken is niet essentieel voor de verhoudingen die in paragraaf 3 worden afgeleid. Als een gevolg zullen we in deze verhoudingen n gebruiken voor een willekeurige n-hoek, met een conditie wanneer de verhoudingen gelden.
- Hiervoor geldt: $AD = DE = EF = FG = GH = HB$ in de bovenste helft en neem $BI = KA = AD$ in de onderste helft.
- Teken nu vanuit de punten D, E, F, G en H, lijnen naar A en B. Dit geeft 5 rechthoekige driehoeken. In bijvoorbeeld $\triangle\ ABD$, heet AB de hypotenusa, BD is de zijde van een regelmatige 12 hoek en AC is het complement van BD.
- Teken vanuit K lijnen naar A, D, E, F, G en H; dan geldt dat KH ook een diameter is.
- Benoem de volgende snijpunten: M, snijpunt van BE met KG; N, snijpunt van BD met KF; en O, snijpunt van BA met KE.
- Teken de lijnen HI en GI.

[1] The Analytic Art, Nine Studies in Algebra, Geometry and Trigonometry from the *Opus Rstitutae Mathematicae Analyseos,seu Algebrâ Novâ* door François Viéte.



Figuur 1: De constructie in een plaatje.

3 Eigenschappen van de constructie.

1. **$\triangle\ HCB$ is gelijkbenig.**
   Dit volgt direct uit het feit dat $CH = CB =$ de straal van de cirkel.

2. **$\triangle\ BIL$ is gelijkvormig aan $\triangle\ HCB$.**
   Dit geldt omdat:

   - $\angle HBC = \angle IBC = \angle IBL$
   - $\angle BLI = \angle LBI = \angle HBC = \angle BHC$, waarbij de eerste gelijkheid geldt, omdat $\angle BIH = \angle LIH$, en de laatste omdat $\triangle HCB$ gelijkbenig is. Uit $\angle BLI = \angle LBI$ volgt dat $\triangle BIL$ gelijkbenig is.

   Uit de gelijkheid van de hoeken volgt nu dat $\triangle BIL$ en $\triangle HCB$ gelijkvormig zijn.

3. **$\triangle BIL$ is gelijkvormig met $\triangle GAL$.**
   Dit geldt omdat:

   - $\angle BLI = \angle GLA$, want dit zijn overstaande hoeken van twee snijdende lijnen.
   - $\angle GAB = \angle BIG$, want dit zijn beide hoeken over dezelfde boog. Hieruit volgt: $\angle GAL = \angle BIL$
   - twee hoeken in de beide driehoeken zijn gelijk, dus ook de derde. Dus $\triangle BIL$ en $\triangle GAL$ zijn gelijkvormig.
   - Omdat $\triangle BIL$ gelijkbenig is, geldt dus ook dat $\triangle GAL$ gelijkbenig is. Dus $AG = AL$.

   Uit deze drie gelijkbenige driehoeken volgen nu de verhoudingen:

$$\begin{aligned}\frac{straal}{zijde\ n\ hoek} &= \frac{CH}{HB} = \frac{BI}{BL} = \frac{HB}{BL} = \frac{HB}{AB - AG} \\ &= \frac{zijde\ n\ hoek}{diameter - AG}.\end{aligned}$$

   We kijken nu naar punt M. Er geldt:

4. **$\triangle EKM$, $\triangle GBM$ en $\triangle HCB$ zijn gelijkvormig (en dus gelijkbenig).**
   Dit geldt omdat:

   - $\angle HCB = \angle GBM = \angle EKM$, dit is zo want $\angle GBE$ en $\angle EKG$ gaan beide over 2 booglengtes en $\angle HCB$ gaat over 1 booglengte maar vanaf het middelpunt. Dus deze drie hoeken zijn gelijk, en dus gelijk aan $\angle HCB$, $\angle GBM$ en $\angle EKM$. Hieruit volgt dat de drie tophoeken gelijk zijn.
   - $\angle CBH = \angle BHC = \angle BHK$, wat een omtrekshoek is over booglengte KB.
   - $\angle CBH = \angle KEM = \angle BGM$, want de laatste twee gaan ook over booglengte KB.
   - we hebben weer twee hoeken gelijk, daaruit volgt dat de derde ook gelijk is. Dus de drie driehoeken zijn gelijkvormig.
   - Verder geldt dat $\triangle HCB$ gelijkbenig is, dus de andere twee ook. Hieruit volgt: $KE = KM$ en $BG = BM$.

   Uit de gelijkvormigheid van de voorgaande driehoeken en het feit dat $MK = AF$, volgen de verhoudingen:

$$\begin{aligned}\frac{straal}{zijde\ n\ hoek} &= \frac{CH}{HB} = \frac{GB}{GM} = \frac{GB}{GK - MK} = \frac{GB}{HA - AF} \\ &= \frac{zijde\ \frac{n}{2}\ hoek}{verschil\ 2\ diagonalen\ om\ AG},\end{aligned}$$

waarbij AG het complement is van GB en waarbij n deelbaar moet zijn door 2.

Voor N kunnen we de verhoudingen op dezelfde manier bepalen. Er geldt:

5. **$\triangle FBN$, $\triangle DKN$ en $\triangle HCB$ zijn gelijkvormig (en dus gelijkbenig).**
Dit geldt omdat:
   - $\angle HCB = \angle FBN = \angle DKN$, dit is zo want $\angle FBN$ en $\angle DKN$ gaan beide over 2 booglengtes en $\angle HCB$ gaat over 1 booglengte maar vanaf het middelpunt. Dus deze drie hoeken zijn gelijk, en gelijk aan de drie hoeken hiervoor. Hieruit volgt dat de drie tophoeken gelijk zijn.
   - $\angle CBH = \angle BHC = \angle BHK$, wat een hoek is over booglengte KB.
   - $\angle CBH = \angle BFN = \angle KDN$, want de laatste twee gaan ook over booglengte KB.
   - we hebben weer twee hoeken gelijk, daaruit volgt de derde is ook gelijk. Dus de drie driehoeken zijn gelijkvormig.
   - Verder geldt dat $\triangle HCB$ gelijkbenig is, dus de andere twee ook. Hieruit volgt: $DK = KN$ en $BF = BN$.

Uit de gelijkvormigheid van de voorgaande driehoeken, volgen de verhoudingen:

$$\begin{aligned}\frac{straal}{zijde\ n\ hoek} &= \frac{CH}{HB} = \frac{FB}{FN} = \frac{FB}{FK - DK} = \frac{FB}{GA - AE} \\ &= \frac{zijde\ \frac{n}{3}\ hoek}{verschil\ 2\ diagonalen\ om\ AF},\end{aligned}$$

waarbij AF het complement is van FB en waarbij n deelbaar moet zijn door 3.

Op dezelfde manier geldt voor O, dat

6. **$\triangle AOK$, $\triangle EOB$ en $\triangle HCB$ zijn gelijkvormig (en dus gelijkbenig).**
waaruit een soortgelijke vehouding volgt:

$$\begin{aligned}\frac{straal}{zijde\ n\ hoek} &= \frac{CH}{HB} = \frac{EB}{EO} = \frac{EB}{EK - AK} = \frac{EB}{FA - AD} \\ &= \frac{zijde\ \frac{n}{4}\ hoek}{verschil\ 2\ diagonalen\ om\ BE},\end{aligned}$$

waarbij AE het complement is van EB en n deelbaar moet zijn door 4. We hebben nu in totaal, de volgende verhoudingen:

$$\frac{CH}{HB} = \frac{HB}{AB - AG} = \frac{GB}{AH - AF} = \frac{FB}{AG - AE} = \frac{EB}{AF - AD}. \tag{1}$$

waarbij de noemer steeds het verschil is van de 2 complementen om het complement behorende bij de teller. Met behulp van de gelijkvormigheid van dezelfde driehoeken kunnen we ook laten zien dat geldt:

$$\frac{CH}{HB} = \frac{GA}{BF - BH} = \frac{FA}{BE - BG} = \frac{EA}{BD - BF}. \tag{2}$$

4 De vergelijkingen

Met behulp van de gevonden verhoudingen is het nu een koud kunstje om van Ceulen's *konstige vergelijkingen* te achterhalen. We maken daarbij gebruik van de volgende verhoudingen:

$$\frac{CH}{BH} = \frac{BH}{AB - AG} = \frac{AG}{BF - BH} = \frac{BF}{AG - AE} = \frac{AE}{BD - BF} \tag{3}$$

Om ons wat rekenwerk te besparen stellen we het lijnstuk BH gelijk aan x en de straal van de cirkel gelijk aan 1. Dan geldt dat $CH = 1$ en bovendien dat $AB = 2$, immers CH is de straal van de cirkel en AB de diameter.

Van de eerst genoemde verhouding is nu alleen AG nog onbekend, dus kunnen we daar een vergelijking in x voor vinden.

$$\begin{aligned} \frac{CH}{BH} &= \frac{BH}{AB - AG} \\ \frac{1}{x} &= \frac{x}{2 - AG} \\ x^2 &= 2 - AG \\ AG &= 2 - x^2 \end{aligned}$$

Van de verhouding $\frac{CH}{BH} = \frac{AG}{BF - BH}$ kennen we nu alleen BF nog niet, en dus is die uit te rekenen.

$$\begin{aligned} \frac{CH}{BH} &= \frac{AG}{BF - BH} \\ \frac{1}{x} &= \frac{2 - x^2}{BF - x} \\ 2x - x^3 &= BF - x \\ BF &= 3x - x^3 \end{aligned}$$

Omdat BH de zijde van een regelmatige twaalfhoek is, kunnen we nu de zijde van een regelmatige vierhoek uitrekenen. natuurlijk is dat niet zo interessant, want er zijn makkelijkere manieren om de zijde van een regelmatige vierhoek te berekenen. Maar merk op dat we tot nu toe nergens hebben gebruikt dat BH de zijde is van een regelmatige twaalfhoek. Het blijkt dat dat ook absoluut geen vereiste is, zodat we concluderen dat in het algemeen geldt:

Als de zijde van een regelmatige 3n-hoek gelijk is aan x, dan is de zijde van een regelmatige n-hoek gelijk aan $3x - x^3$.

Kijken we nu verder naar de volgende verhouding, $\frac{CH}{BH} = \frac{BF}{AG - AE}$ dan zien we dat er ook hier nu nog maar één onbekende is, namelijk AE. Invullen van alle bekende gegevens geeft:

$$\begin{aligned} \frac{CH}{BH} &= \frac{BF}{AG - AE} \\ \frac{1}{x} &= \frac{3x - x^3}{(2 - x^2) - AE} \\ (2 - x^2) - AE &= 3x^2 - x^4 \\ AE &= 2 - x^2 - 3x^2 + x^4 \\ AE &= 2 - 4x^2 + x^4 \end{aligned}$$

Als we tot slot de laatste verhouding bekijken, dan zien we dat ook daar nog maar één onbekende is. Die lossen we als volgt op:

$$\begin{aligned}
\frac{CH}{BH} &= \frac{AE}{BD-BF}\\
\frac{1}{x} &= \frac{2-4x^2+x^4}{BD-(3x-x^3)}\\
BD-(3x-x^3) &= 2x-4x^3+x^5\\
BD &= 2x-4x^3+x^5+(3x-x^3)\\
BD &= 5x-5x^3+x^5
\end{aligned}$$

Deze laatste formule herkennen we ook weer als eentje die van Ceulen gebruikt. Met dezelfde argumentatie als bij de formule tussen de n-hoek en de 3n-hoek, kunnen we nu stellen dat het volgende geldt:

Als x de zijde is van een regelmatige 5n-hoek, dan wordt de zijde van een regelmatige n-hoek gegeven door de formule $5x - 5x^3 + x^5$

We hebben nu formules om een zijde van een regelmatige n-hoek uit te drukken in de zijdes van een regelmatige 3n-hoek en een regelmatige 5n-hoek (ook voor een 2n-hoek en een 4n-hoek) . Van Ceulen had ook formules om een regelmatige n-hoek uit te drukken in de zijdes van een regelmatige 7n-hoek en een 9n-hoek. Die formules zijn helaas niet te achterhalen met de verhoudingen die we gevonden hebben in de regelmatige twaalfhoek, omdat $\frac{7}{12}$ en $\frac{9}{12}$ groter zijn dan $\frac{1}{2}$. Als we waren begonnen met een regelmatige twintighoek was dat wel gelukt. Het is afleiden van die formules is rechttoe rechtaan en levert de volgende formules:

Als x de zijde is van een regelmatige 7n-hoek, dan wordt de zijde van een regelmatige n-hoek gegeven door de formule $7x - 14x^3 + 7x^5 - x^7$ en als x de zijde is van een regelmatige 9n-hoek, dan wordt de zijde van een regelmatige n-hoek gegeven door de formule $9x - 30x^3 + 27x^5 - 9x^7 + x^9$

5 De Coëfficienten

De methode die we gebruikt hebben om de formules af te leiden werkt prima, maar is niet heel handig. Ten eerste omdat de benodigde verhoudingen alleen makkelijk te vinden zijn door een regelmatige veelhoek daadwerkelijk te tekenen, iets wat redelijk bewerkelijk wordt wanneer je op zoek gaat naar het verband tussen de zijdes van een regelmatige n-hoek en een regelmatige 13n-hoek. In dat geval moet je namelijk op zijn minst een 28-hoek gaan tekenen.

Het tweede nadeel van deze methode is dat het een soort iteratieproces is. Je kunt het verband tussen een 5n-hoek en ene n-hoek pas vinden als je het verband tussen een 3n-hoek en een n-hoek eerst hebt afgeleid. Voor een regelmatige 13n-hoek heb je de formules voor de regelmatige 11n-hoek, 9n-hoek, 7n-hoek, 5n-hoek en 3n-hoek dus ook nodig!

Gelukkig blijkt er een verband te bestaan tussen de coëfficienten van deze formules. Viète heeft dit verband ook ontdekt en geeft de volgende tabel met coëfficienten:

Eerste								
(−)								
2	Tweede							
3	(+)							
4	2	Derde						
5	5	(−)						
6	9	2	Vierde					
7	14	7	(+)					
8	20	16	2	Vijfde				
9	27	30	9	(−)				
10	35	50	25	2	Zesde			
11	44	77	55	11	(+)			
12	54	112	105	36	2	Zevende		
13	65	156	182	91	13	(−)		
14	77	210	294	196	49	2	Achtste	
15	90	275	450	378	140	15	(+)	
16	104	352	760	672	336	64	2	Negende
17	119	442	935	1122	714	204	17	(−)
18	135	546	1287	1882	1386	540	81	2
19	152	665	1729	2817	2508	1254	285	19
20	170	800	2275	4104	4390	2640	825	100
21	189	952	2940	5833	7207	5148	2079	385

De tabel moet als volgt gelezen worden. Als je op zoek bent naar het verband tussen de zijdes van een 7n-hoek en een n-hoek, dan zoek je de 7 op in de eerste kolom. De coëfficienten in deze rij zijn: 7, 14 en 7 . De formules voor de zijde van een n-hoek, gegeven dat de zijde van een 7n-hoek lengte x heeft, is dan $7x - 14x^3 + 7x^5 - x^7$.

Het eerste wat opvalt aan deze tabel met coëfficienten is dat de plus en min tekens bovenin precies verkeerdom zijn, daar waar een plus staat moet een min staan en vise versa. Dit komt omdat Viète deze tabel in eerste instantie niet heeft opgesteld als overzicht voor de coëfficienten van deze formules, maar voor de coëfficienten van andere formules die hij gevonden had.

Het verband tussen de coëfficienten is snel duidelijk. Elke kolom begint met een twee. Verder bestaat er het volgende verband tussen de coëfficienten.'Elke coëfficient is gelijk aan de som van het getal erboven en het getal in de kolom links en twee getallen hoger.' In meer wiskundige taal: $c_{ij} = c_{i,j-1} + c_{i-1,j-2}$, waarbij i staat voor de kolom en j voor de rij.

Het is eenvoudig na te gaan dat deze coëfficienten inderdaad kloppen en dat het verband tussen de coëfficienten klopt. Veel moeilijker is om te bewijzen dat de coëfficienten kloppen. Viète geeft in het hoofdstuk 'Universal Theorems on the Analysis of Angular Sections' uit het boek 'The Analytic Art' in iedergeval geen bewijs. Hij geeft zelfs niet aan waar hij het verband vandaan heeft, het is dus onduidelijk of hij eerst alle coëfficienten heeft opgeschreven, en daarna het verband ertussen heeft gevonden, of dat hij daarwerkelijk het verband heeft gezien, en aan de hand daarvan de tabel heeft opgesteld.