Controle van Van Ceulens antwoorden

Marloes Bazelier Marloes Turk

17 juli 2006

Inhoudsopgave

1 Inleiding **2**

2 Het XIIII. Capittel **2**
Tabel 2.1: Controle waardes uit *Het XIIII Capittel* 3
Tabel 2.2: Controle van Van Ceulens tabel van pagina 19v 4

3 Fouten opsporen **4**
3.1 Fouten nader bekijken 5

4 Rechte linies en hun complementen **6**

5 Conclusie **9**

1 Inleiding

Dit verslag is naar aanleiding van het seminarium geschiedenis van de wiskunde, te Utrecht 2006, tot stand gekomen. Ons is allereerst gevraagd te kijken naar de door Ludolph van Ceulen uitgerekende waarden in *Het XIIII. Capittel* uit zijn boek *Vanden Circkel* uit 1596. Wij hebben deze enorm precieze waarden op juistheid gecontroleerd (wat voor ons natuurlijk erg makkelijk was met behulp van een computer, maar we moeten ons goed realiseren dat Van Ceulen dit allemaal met de hand heeft moeten doen!). Daarnaast hebben wij gekeken of wij door zijn gemaakte fouten konden achterhalen wat zijn oplosmethode was voor hogeregraads vergelijkingen. In het volgende hoofdstuk zullen wij aangeven in hoeverre de waarden van Ludolph van Ceulen juist bleken te zijn. In het derde hoofdstuk bespreken wij zijn gemaakte fouten.
Als tweede werd ons gevraagd de tabel onderaan pagina 21r in *Vanden Circkel* te controleren. Dit doen wij in hoofdstuk 4. Tot slot geven wij onze conclusie.

2 Het XIIII. Capittel

In dit hoofdstuk rekent Van Ceulen de lengtes van zijdes van regelmatige veelhoeken uit. Deze veelhoeken zijn telkens ingeschreven in een cirkel met straal 1. Wij hebben de waardes uit *Het XIIII. Capittel* verzameld in een tabel, zie *tabel 2.1.* In deze tabel hebben wij de volgorde aangehouden waarin Van Ceulen de verschillende hoeken behandeld heeft. In deze tabel verwijst de waarde onder blz. naar de bladzijde uit *Vanden Circkel* waar Van Ceulen de waarde geeft; onder hoeken staat het aantal hoeken dat de betreffende veelhoek heeft; dec. staat hier voor het aantal decimalen nauwkeurig waarin Van Ceulen de waarde gegeven heeft. Wij hebben telkens de onderwaarde die Van Ceulen geeft genoteerd, oftewel de naar beneden afgeronde waarde. Daarom staat boven de gegeven waardes bij Van Ceulen 'te cort'. Geeft hij maar één waarde dan zijn wij er van uit gegaan dat dit de onderwaarde is. Onder Mathematica staan de waardes die wij via Mathematica uitgerekend hebben, altijd in één of zonodig twee extra decimalen. Het extra decimaal is nodig omdat Mathematica de waardes naar beneden of naar boven afrondt (vanaf een 5 omhoog) en we anders dus niet kunnen zien of de aanduiding 'te cort' van Van Ceulen nu juist is of niet. Voor een n-hoek kan deze waarde in bijvoorbeeld 25 decimalen als volgt worden berekend: N[2*Sin[(180/n)Degree], 25]. Hierbij moet rekening gehouden worden met het feit dat Mathematica hiermee het antwoord zal geven in 25 *significante* decimalen. De waarde 0.012 heeft 2 significante decimalen maar bevat 3 decimalen achter de komma.
Onder juist valt terug te vinden of de waarde van Van Ceulen overeenkomt met de door ons gevonden waarde. In de tabel hebben we voor de duidelijkheid de verschillen ook nog eens vet gedrukt.
Aan het eind van *Het XIIII. Capittel* geeft Van Ceulen zelf nog een samenvattende tabel. Aangezien hij hier ook lengtes van zijdes van regelmatige veelhoeken (ingeschreven in een cirkel met straal 1) geeft die niet in de voorgaande tekst voorkomen, hebben wij deze tabel ook op fouten gecontroleerd. Zie *tabel 2.2.* In deze tabel geeft Van Ceulen alle waardes in 14 decimalen nauwkeurig. We merken nog op dat waar wij spreken over 'decimalen', Van Ceulen dit begrip in zijn tekst ontwijkt door uit te gaan van een cirkel met een straal die zo groot is dat hij de lengte van een zijde van een veelhoek uit kan drukken in een geheel getal.

blz.	hoeken	dec.	L. van Ceulen (te cort)	Mathematica	juist
17r	9	24	0.684040286651337466088199	0.6840402866513374660881992	✓
17r	27	24	0.232185828250460459351333	0.2321858282504604593513330	✓
17r	45	24	0.139512947488250601551917	0.1395129474882506015519177	✓
17r	75	24	0.083751307458399259105670	0.0837513074583992591056707	✓
17r	135	24	0.046537912748112644543202	0.0465379127481126445432026	✓
17r	225	24	0.027924360678290543243822	0.0279243606782905432438228	✓
17r	675	24	0.009308389071322324827845	0.0093083890713223248278454	✓
17v	9	33	0.68404028665133746608819922936451**8**	0.684040286651337466088199229364519**9**2	×
17v	18	28	0.3472963553338606977034332535	0.34729635533386069770343325354	✓
18r	14	24	0.445041867912628808577805	0.4450418679126288085778051	✓
18r	7	24	0.867767478235116240951536	0.8677674782351162409515367	✓
18r	22	20	0.28462967654657028088	0.284629676546570280888	✓
18r	11	17	0.56346511368285939	0.563465113682859395	✓
18r	26	24	0.241073360510646106698135	0.2410733605106461066981354	✓
18r	13	16	0.4786313285751155	0.47863132857511553	✓
18r	34	22	0.184536718926603990479**4**	0.1845367189266039904793**3**0	×
18v	17	22	0.3674990356331406631488	0.36749903563314066314882	✓
18v	38	24	0.165158690944664649200687	0.1651586909446646492006879	✓
18v	19	25	0.329189180561467	0.3291891805614678	✓
18v	46	22	0.1364848267293419518423	0.13648482672934195184238	✓
18v	23	21	0.272333298192493181 52	0.2723332981924931815 21	✓
18v	92	18	0.068282220371935790	0.0682822203719357905 7	✓
18v	25	23	0.25066646712860849074623	0.250666467128608490746238	✓
18v	27	28	0.232185828250460459351333046**8**	0.2321858282504604593513330467**7**6	×
18v	58	16	0.1082778171708350	0.10827781717083505	✓
18v	29	15	0.216238036847883	0.2162380368478835	✓
18v	62	17	0.10129833767742542	0.101298337677425425	✓
18v	31	16	0.2023366439748643	0.20233664397486436	✓
18v	74	17	0.08488240639229661	0.0848824063922966118	✓
18v	37	16	0.1696118489510183	0.16961184895101838	✓
18v	82	15	0.076605467380070	0.07660546738007070	✓
18v	41	14	0.15309850567299	0.153098505672991	✓
18v	86	16	0.073044046115317**7**	0.07304404611531**6**70	×
18v	43	15	0.145990629321815	0.1459906293218151	✓
18v	45	36	0.139512947488250601551917670388286657	0.1395129474882506015519176703882866572	✓
18v	94	17	0.06682995401534914	0.0668299540153491418	✓
18v	47	16	0.1335852674902431	0.13358526749024311	✓
18v	49	14	0.12814043996142	0.128140439961426	✓
19r	106	16	0.0592666556451194	0.059266655645119481	✓
19r	118	15	0.053241042875548	0.0532410428755**4**953	×
19r	59	14	0.10644434968435	0.106444349684357	✓
19r	122	15	0.051495827309977	0.05149582730997711	✓
19r	61	14	0.10295750954069	0.102957509540693	✓
19r	134	16	0.0468851472065208	0.046885147206520887	✓
19r	67	16	0.0937445249398801	0.09374452493988012 5	✓
19r	142	17	0.04424417430637379	0.0442441743063737952	✓
19r	71	15	0.088466693450757	0.08846669345075771	✓
19r	146	18	0.043032194872444396	0.0430321948724443967 5	✓
19r	73	16	0.0860444660090609	0.086044466009060949	✓
19r	75	38	0.08375130745839925910567070314546536644	0.083751307458399259105670703115465366447	×
19r	135	32	0.0465379127481126445432026044749**1**	0.046537912748112644543202604474**9**027	×
19r	158	22	0.0397643753301403386543	0.039764375330140338654358	✓
19r	79	20	0.07951303019385126124	0.0795130301938512612491	✓

Tabel 2.1: Controle waardes uit *Het XIIII Capittel*

hoeken	L. van Ceulen (t.c.)	Mathematica	juist
3	1.73205080756887	1.732050807568877	✓
4	1.41421356237309	1.414213562373095	✓
5	1.17557050458494	1.175570504584946	✓
6	1.00000000000000	1.000000000000000	✓
7	0.86776747823511	0.867767478235116	✓
8	0.76536686473017	0.7653668647301795	✓
9	0.68404028665133	0.684040286651337	✓
10	0.61803398874989	0.618033988749895	✓
11	0.56346511368285	0.563465113682859	✓
12	0.51763809020504	0.517638090205042	✓
13	0.47863132857511	0.478631328575116	✓
14	0.44504186791262	0.445041867912629	✓
15	0.41582338163551	0.415823381635519	✓
16	0.39018064403225	0.390180644032257	✓
17	0.36749903563314	0.367499035633141	✓
18	0.34729635533386	0.347296355333861	✓
19	0.32918918056146	0.329189180561468	✓
20	0.31286893008046	0.312868930080462	✓
21	0.29808453235234	0.298084532352349	✓
22	0.28462967654657	0.2846296765465703	✓
23	0.27233329819249	0.272333298192493	✓
24	0.26105238444010	0.261052384440103	✓
25	0.25066646712860	0.250666467128608	✓
26	0.24107336051064	0.241073360510646	✓
27	0.23218582850460	0.232185828**2**50460	×
28	0.22392895220661	0.223928952206616	✓
29	0.21623803684788	0.216238036847884	✓
30	0.20905692653530	0.209056926535307	✓
31	0.20233664397486	0.202336643974864	✓
32	0.19603428065912	0.196034280659121	✓
33	0.19011208660836	0.190112086608365	✓
34	0.18453671892660	0.184536718926604	✓
35	0.179278617806**08**	0.179278617806**867**	×
36	0.17431148549531	0.174311485495316	✓
37	0.16961184895101	0.169611848951018	✓
38	0.16515869094466	0.165158690944665	✓
39	0.16093313743345	0.160933137433452	✓
40	0.1569181914556**8**	0.1569181914556**90**	×
41	0.15309850567299	0.153098505672991	✓
42	0.14946018717284	0.149460187172849	✓
43	0.14599062932181	0.145990629321815	✓
44	0.14267836639846	0.142678366398465	✓
45	0.13951294748825	0.139512947488251	✓
46	0.13648482672934	0.136484826729342	✓
47	0.13358526749024	0.133585267490243	✓
48	0.13080625846028	0.130806258460286	✓
49	0.12814043996142	0.128140439961426	✓
50	0.12558103905862	0.125581039058627	✓
51	0.12312181226788	0.123121812267886	✓
52	0.12075699484457	0.120756994844572	✓
53	0.11848125578742	0.118481255787429	✓
54	0.1162896578**5**095	0.1162896578**2**0952	×
55	0.114177621**61**55**1**	0.114177621**72**55**3**6	×
56	0.11214089447438	0.112140894474384	✓
57	0.11017552071173	0.110175520711731	✓
58	0.10827781717083	0.108277817170835	✓
59	0.10644434968435	0.106444349684357	✓
60	0.10467191248588	0.104671912485888	✓
61	0.10295750954069	0.102957509540693	✓
62	1.01298337677425	0.1012983376774254	×
63	0.9969177132139**5**	0.09969177132139**43**	×
64	0.09813534865483	0.098135348654836	✓
65	0.09662759051014	0.09662**6**7590510141	×
66	0.09516383164748	0.095163831647484	✓
67	0.09374452493988	0.093744524939880	✓
68	0.09236691729147	0.092366917291479	✓
69	0.09102919826592	0.091029198265927	✓
70	0.08972966**9**70**063**	0.08972966**0**70**1029**	×
71	0.08846669345075	0.088466693450757	✓
72	0.08723877473067	0.087238774730672	✓
73	0.08604446600906	0.086044466009060	✓
74	0.08488240639229	0.084882406392296	✓
75	0.08375130745839	0.083751307458399	✓
76	0.08264994849762	0.082649948497626	✓
77	0.08157717212317	0.081577172123171	✓
78	0.08053188021883	0.080531880218830	✓
79	0.07951303019385	0.079513030193851	✓
80	0.07851963151813	0.078519631518137	✓

Tabel 2.2: Controle van Van Ceulens tabel van pagina 19v

3 Fouten opsporen

Bij de 27 en de 65 hoek in *tabel 2.2* lijkt er duidelijk sprake te zijn van een druk/zet fout; er lijkt een getal vergeten te zijn neergezet. Dit versterkt ons vermoeden dat er bij de 75 hoek in *tabel 2.1* en de 54 hoek in *tabel 2.2* ook wel eens sprake zou kunnen zijn van een druk/zet fout. De fout bij de 35 hoek in *tabel 2.2* zou ook geïnterpreteerd kunnen worden als een druk/zet fout. Verder valt ons op dat bij de meeste fouten de fout zich bevindt in het laatste decimaal. Daarbij is dit laatste decimaal in al die gevallen steeds één te hoog of één te laag. Deze gevallen zijn voor *tabel 2.1* de 9, 34, 27, 86, 118 en 135 hoek. Voor *tabel 2.2* zijn dit de 40 en 63 hoek. Bij de 62 en de 63 hoek in *tabel 2.2* is duidelijk een decimaal teveel neergezet waardoor de zijde 10× zo groot lijkt te zijn. De enige twee berekeningen waar grote fouten lijken te zijn gemaakt zijn bij de zijdes van de 55 en de 70 hoek. Maar als de eerder geconcludeerde druk/zet fouten in ogenschouw worden genomen zouden ook de fouten in deze laatste twee antwoorden gedeeltelijk of geheel als druk/zet fout geïnterpreteerd kunnen worden.

3.1 Fouten nader bekijken

Aangezien het niet duidelijk is welke fouten door Van Ceulen en welke fouten door de drukker/zetter zijn gemaakt, wordt het moeilijk om een conclusie uit de fouten te trekken. Toch hebben we ons wat meer verdiept in een aantal fouten, namelijk die waarbij we het idee hadden dat ze wel eens van Van Ceulen af konden komen in plaats van de drukker/zetter. Deze fouten bieden ons de grootste kans om te kunnen achterhalen wat de oploskunst van Van Ceulen voor hogeregraads vergelijkingen was.

hoeken	dec.	oplosmethode
9	33	$3x - x^3 = \sqrt{3}$
34	22	$\sqrt{2+\sqrt{2+x}} = 2 - 4x^2 + x^4$
		$\Rightarrow 2 - 64x^2 + 336x^4 - 672x^6 + 660x^8 - 352x^{10} + 104x^{12} - 16x^{14} + x^{16} = x$
27	28	$3x - x^3 =$ zijde 9-hoek
86	16	$\sqrt{2-\sqrt{2-x}} = 11x + 77x^5 + 11x^9 - 55x^3 - 44x^7 - x^{11}$
		$\Rightarrow$ 44-graads vergelijking
118	15	$\sqrt{2-\sqrt{2-x}} = 15x - 140x^3 + 378x^5 - 450x^7 + 275x^9 - 90x^{11} + 15x^{13} - x^{15}$
		$\Rightarrow$ 60-graads vergelijking
135	32	$3x - x^3 =$ zijde 45-hoek
35	14	via 7 en 5 hoek
40	14	wordt niet nader gespecificeerd
55	14	via 10 en 11 hoek
63	14	via 7 en 9 hoek
70	14	wordt niet nader gespecificeerd

Zo op het eerste gezicht kunnen wij geen overeenkomsten vinden tussen de gemaakte fouten. Wel valt op dat de zijde van de 27-hoek via de zijde van de 9-hoek wordt uitgerekend. Bij het 28 decimalen nauwkeurige antwoord dat van Ceulen geeft voor deze zijde zit op het eind een fout. Deze zou veroorzaakt kunnen zijn door de fout bij de zijde van de 9-hoek. Met behulp van Mathematica hebben wij met het foute antwoord van de zijde van de 9-hoek de zijde van de 27-hoek uitgerekend:

$$\text{Solve}[3x - x^3 == 0.684040286651337466088199229364518, x]$$

$$\begin{cases} x & \rightarrow & -1.836432213760548029517922830629 27 \\ x & \rightarrow & 0.232185828250460459351333046761423 \\ x & \rightarrow & 1.604246385510087570166589783867 85 \end{cases}$$

In 28 decimalen nauwkeurig is dit antwoord correct. En dus is de fout bij de 27-hoek niet een gevolg van de fout bij de 9-hoek.
Wat ook opvalt is dat Van Ceulen, volgens de waarden die hij in zijn boek geeft, met een fout antwoord voor de zijde van een 34 hoek een correct antwoord voor de zijde van een 17-hoek uitgerekend heeft. De formule om van een zijde (x) van een $2n$ hoek naar een zijde y van een n hoek te komen is:

$$y = 2x\sqrt{1 - \frac{1}{4}x^2}.$$

Vullen wij voor x het fout gegeven antwoord van Van Ceulen in, dan krijgen wij voor y (afgerond op 23 decimalen):

$$y = 0.36749903563314066314901$$

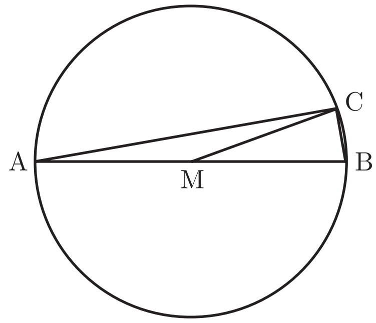
Dit is niet het antwoord wat Van Ceulen heeft gegeven. Vullen wij nu voor x de correctere waarde 0.18453671892660399047 93 in, dan krijgen wij afgerond op 23 decimalen voor y:

$$y = 0.36749903563314066314881$$

In 22 decimalen (de nauwkeurigheid die Van Ceulen geeft) is dit antwoord correct en komt het overeen met wat Van Ceulen geeft. De fout bij de 34-hoek moet er dus na het rekenwerk zijn ingeslopen.

4 Rechte linies en hun complementen

Laat $\angle CMB$ in figuur 1 een gegeven hoek van n minuten zijn. Van Ceulen berekent in *Het XV. Capittel* de lengte van de koorde CB (die hij Linie noemt) en ook van het complement hiervan, AC.



Figuur 1: *Rechte linie CB*

Min.	L. van Ceulen	Mathematica	juist
1	0.00029088820764014734 2954	0.00029088820764014734295479	✓
2	0.0005817764091268491 92748	0.00058177640912684919274859	✓
3	0.00087266459830666018 6390	0.00087266459830666018639035	✓
4	0.00116355276902613522 1228	0.0011635527690261352212288	✓
5	0.0014544409151318295 8**3140**	0.0014544409151318295 8**51224**	×
6	0.00174532903047029908 6609	0.0017453290304702990866092	✓
7	0.0020362171088881001850 7**7**	0.0020362171088881001850 7**67**	×
8	0.0023271051442317901 2**9320**	0.0023271051442317901 2**093198**	×
9	0.00261799313034792704 5771	0.00261799313034792704577101	✓
10	0.0029088810610830701 **48583**	0.0029088810610830701 **5254898**	×
11	0.00319976893028377980	0.00319976893028377980574990	✓
12	0.00349065673179661767 1556	0.0034906567317966176715564	✓

Compl.	L. van Ceulen	Mathematica	juist
1	1.99999997884601255210 28350	1.99999997884601255210283500 7	✓
2	1.99999991538405065590 25249	1.99999991538405065590252497 4	✓
3	1.9999998096141156538726 15**3**	1.9999998096141156538726 15**273**	×
4	1.99999966153620978346 89833	1.999999661536209783468983300 3	✓
5	1.9999994711503361771297 9**25**	1.9999994711503361771297 9**115**	×
6	1.99999923845649886227 54193	1.99999923845649886227541935	✓
7	1.99999896345470276130 83816	1.99999896345470276130838166	✓
8	1.9999986461449536916132 2**1**	1.9999986461449536916132 2**094**	×
9	1.99999828652725836555 6386	1.9999982865272583655563861 2	✓
10	1.999997884601624390486 09**6**	1.999997884601624390486 09**016**	×
11	wordt niet gegeven	1.99999744036806026873214917	
12	1.99999695382657539760 5802	1.99999695382657539760580250	✓

In het hoofdstuk vermeldt Van Ceulen niet hoe hij de waarden uit de tabel precies berekend heeft. We vermoeden echter dat hij is uitgegaan van een benadering van de $\sin(1\ minuut)$ (dit is gelijk aan de linie horende bij 1 minuut, omdat de straal van de cirkel 1 is) en dat hij met behulp van de volgende formule de $\sin(2\ minuten)$ heeft uitgerekend (en dus de linie horend bij 2 minuten): $\sin(\alpha+\beta) = \sin(\alpha)\cos(\beta) + \cos(\alpha)\sin(\beta)$. Met de methode die hij in het hoofdstuk behandelt, kon hij vervolgens de resterende linies uitrekenen.

We gaan nu over op de controle van de antwoorden. Zoals te zien is heeft Van Ceulen de lengte van de linie van 3 minuten goed uitgerekend. In Mathematica kan deze als volgt worden uitgerekend:

$$\mathrm{N}[2 * \mathrm{Sin}[(3/120)\mathrm{Degree}], 25].$$

Op deze manier geeft Mathematica de waarde in 25 significante decimalen nauwkeurig:

$$0.0008726645983066601863903482.$$

De lengte van deze linie kan ook worden uitgerekend op de manier van Van Ceulen, namelijk:

$$(0.0002908882076401473429 54 * 1.9999999153840506559025249 + \\ 1.9999999788460125521028350 * 0.0005817764091268491927 48)/2.$$

In 23 significante decimalen nauwkeurig geeft Mathematica het volgende antwoord:

$$0.00087266459830666018638897.$$

Wat dus niet het juiste antwoord is. Ook Van Ceulen kwam niet op dit antwoord, zoals te zien is eindigt hij met de correcte cijfers 90 en niet met 88. Dit doet vermoeden dat Van Ceulen de waardes van de linien en complementen van 1 en 2 minuten nauwkeuriger had uitgerekend dan hij ze in zijn tabel heeft weergegeven. Het complement van 3 minuten kon Van Ceulen nu op de volgende manier uitrekenen (met behulp van de stelling van Pythagoras in driehoek ACB):

$$\sqrt{4 - (0.00087266459830666018639 0)^2}.$$

Mathematica geeft hiervoor het volgende antwoord:

$$1.99999980961411565387261527...$$

Dit is niet wat Van Ceulen als antwoord heeft gekregen. Hij heeft een 3 op het eind, welke een 2 moet zijn (omdat hij ook hier steeds weer te 'corte' waardes geeft). In het vorige hoofdstuk kwamen we dit soort fouten al vaker tegen.
Als we de linie van 4 minuten uitrekenen via de linien en de complementen van 1 en 3 minuten krijgen we:

$$0.00116355276902613522122 76...$$

Rekenen we de linie van 4 minuten uit via de linie en het complement van 2 minuten dan krijgen we:

$$0.00116355276902613522122 76...$$

Omdat Van Ceulen een nauwkeuriger antwoord geeft dan de bovenstaande waardes, versterken deze antwoorden versterken ons vermoeden dat hij de linien van 1 en 2 minuten nauwkeuriger wist. Er valt hieruit niet op te maken welke manier hij gebruikt heeft voor het uitrekenen van de linie van 4 minuten.
Met de linien en complementen van 2 en 3 minuten kunnen we nu de linie van 5 minuten uitrekenen:

$$(0.0005817764091268491927 48 * 1.99999980961411565387261 53 + \\ 0.00087266459830666018639 0 * 1.9999999153840506559025249)/2 \\ = 0.00145444091513182958512 14...$$

Werkende met de getallen die Van Ceulen ons gegeven heeft, komen we niet op zijn antwoord uit. Maar de linie van 5 minuten kan ook via de linien en complementen van 1 en 4 minuten worden uitgerekend:

$$\begin{aligned}&(0.000290888207640147342954 * 1.99999966153620978346898 33+\\&0.001163552769026135221228 * 1.999999978846012552102835 0)/2\\&= 0.001454440915131829585120 8...\end{aligned}$$

Ook dit is niet de waarde die Van Ceulen hiervoor geeft, Van Ceulen komt op:

$$0.00145444091513182958\mathbf{3}1\mathbf{4}0.$$

De laatste manier van uitrekenen komt wel dichter in de buurt bij wat Van Ceulen heeft opgeschreven; nu komen alleen de 3 en 4 bij het antwoord van Van Ceulen niet overeen. De 3 had een 5 moeten zijn en de 4 een 2. Dit zouden overschrijf- of leesfouten kunnen zijn. Het complement van 5 minuten uitgerekend met het foute antwoord van Van Ceulen geeft het volgende:

$$\sqrt{4-(0.001454440915131829583140)^2} = 1.99999947115033617712979259...$$

Dit komt overeen met de (foute) waarde die Van Ceulen hiervoor geeft. Hieruit kunnen we de conclusie trekken dat de fout bij de linie van 5 minuten gemaakt is voordat het complement van 5 minuten werd uitgerekend, en dus kan deze fout niet een fout van de zetter zijn. Dus of Van Ceulen heeft hier een rekenfout gemaakt of hij heeft een lees/overschrijvingsfout binnen zijn eigen aantekeningen gemaakt.
Als we nu de linie van 10 minuten uitrekenen via de foute waarden voor de linie en het complement van 5 minuten, krijgen we het volgende:

$$\begin{aligned}&0.001454440915131829583140 * 1.999999471150336177129 25\\&= 0.002908881061083070148584 2...\end{aligned}$$

Dit is het antwoord dat Van Ceulen gevonden heeft, behalve dan dat zijn laatste cijfer een 3 is en niet een 4. Dus hieruit kunnen we concluderen dat Van Ceulen de linie van 10 minuten inderdaad via de linie en het complement van 5 minuten heeft uitgerekend. Hij heeft zijn waarde blijkbaar niet gecontroleerd via een andere manier. Als hij dit bijvoorbeeld wel had gedaan met de linien 1 en 9 had hij het volgende gekregen:

$$\begin{aligned}&(0.000290888207640147342954 * 1.999998286527258365556386+\\&0.002617993130347927045771 * 1.999999978846012552102835 0)/2\\&= 0.002908881061083070152548 1...\end{aligned}$$

Op deze manier zou hij wel degelijk in 24 decimalen achter de komma een correct antwoord hebben gekregen.
Als we met de foute waarde van Van Ceulen het complement van 10 minuten uitrekenen valt op dat het laatste decimaal in zijn antwoord 1 lager had moeten zijn, namelijk een 5.
De linie van 8 minuten hebben wij op alle vier de mogelijke manieren uitgerekend met de waardes die Van Ceulen berekend had. Bij drie van de vier manieren staat er wel een 0 na de 012. De manier waar dat niet zo was was die via de 3 en 5 minuten. Het antwoord op deze manier verkregen lijkt niet op het antwoord dat Van Ceulen geeft. Dat zal ongetwijfeld ook komen door de fout bij de 5 minuten. Het antwoord verkregen door de 2 en 6 minuten lijkt het meest:

$$\begin{aligned}&(0.000581776409126849192748 * 1.999999238456498862275419 3+\\&0.001745329030470299086609 * 1.999999915384050655902524 9)/2\\&= 0.00232710514423179012\mathbf{0}93\mathbf{1}20...\end{aligned}$$

Het antwoord Van Ceulen heeft gegeven was:

$$0.002327105144231790129320.$$

Aangezien het erg waarschijnlijk is dat hij de 0 vergeten is over te nemen, is het ook goed mogelijk dat hij de 1 ook vergeten is. In dit geval lijkt ons een overschrijffout het meest aannemelijk. Het complement uitgerekend met de foute linie van Van Ceulen geeft:

$$1.9999986461449536916132\,11.$$

En het complement uitgerekend met de goede waarde geeft:

$$1.9999986461449536916132\,20.$$

Hieruit kunnen we niet concluderen welke waarde Van Ceulen gebruikt heeft.
Voor de linie van 7 minuten geven de manieren via de 1 en 6 minuten en de 3 en 4 minuten de meest nauwkeurige antwoorden. Maar toch geven zij beide niet het antwoord dat Van Ceulen geeft. Beide eindigen op een 5 in plaats van op een 7. Het zou kunnen dat Van Ceulen de manier van 1 en 6 minuten heeft gebruikt en dat hij een nauwkeurigere waarde voor de linie van 1 minuut heeft gebruikt. Toch kwam hij niet op het juiste antwoord wat dan weer op twee manieren te verklaren valt, namelijk dat de nauwkeurigere waarde van de linie van 1 minuut niet nauwkeurig genoeg was of dat hij zijn 'bekende' fout gemaakt heeft, namelijk die van het laatste decimaal 1 te hoog of te laag.

5 Conclusie

Er zijn vaak meerdere manieren om de fouten van Van Ceulen te verklaren zodat het moeilijk is om een goede conclusie uit deze fouten te trekken. Een veel voorkomende fout is dat het laatste decimaal 1 te hoog of 1 te laag is. Deze fout lijkt niet alleen voor te komen bij het oplossen van hogeregraads vergelijkingen, zoals we gezien hebben in hoofdstuk 2, maar ook bij het uitrekenen van rechte linies en hun complementen, zoals bleek in hoofdstuk 4. Dit versterkt het vermoeden dat het 'simpele' rekenfoutjes zijn. Wie maakt er niet wel eens een foutje bij het hoofdrekenen zonder rekenmachine? Het is wonderbaarlijk te noemen hoeveel hij eigenlijk goed heeft uitgerekend zonder computers of rekenmachines.
Wij zijn er tot nu toe niet achtergekomen wat zijn oplosmethode was voor het oplossen van hogeregraads vergelijkingen. Het materiaal dat we bestudeerd hebben bleek daar immers te weinig houvast voor te bieden door het het geringe aantal fouten.
Aan de getallen in hoofdstuk 4 blijkt Van Ceulen niet zo'n grote waarde gehecht te hebben als aan de lengtes van de zijdes van veelhoeken; hoewel hij op redelijk makkelijke wijze zijn uitkomsten had kunnen controleren, blijkt hij dit niet gedaan te hebben (zie het geval van 10 minuten).